Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής ΙΙ

Χειμερινό εξάμηνο 2016-17

Αναστάσιος Χρ. Πέτκου

Εξέταση Ιανουαρίου 2017

Έχετε 24 ώρες να επιστρέψετε τις λύσεις, σε ηλεκτρονική μορφή στο email: petkou@physics.auth.gr

Θέμα 1:

Έστω 2βάθμια γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση μια μεταβλητής, της οποία η χαρακτηριστική εξίσωση γύρω από το κανονικό ανώμαλο σημείο $z_0 = 0$ είναι:

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0\,, \quad p_0, q_0 \in \mathbb{R}$$

Αν η πιο πάνω εξίσωση έχει διπλή ρίζα λ_*, και αν $w_1(z)$ είναι μια λύση της Δ.Ε., δείξτε ότι η δεύτερη λύση είναι η

$$w_2(z) = w_1(z) \int u(z)dz\,, \;\; u(z) = \frac{1}{w_1^2(z)} e^{-p_0 \ln z}$$

Θέμα 2: Θεωρείστε την εξίσωση

$$z(1-z)w''(z) + (1-z)w'(z) + \lambda w(z) = 0$$

α) Βρείτε και χαρακτηρίστε τα ανώμαλα σημεία της και λύστε τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές εξισώσεις.

β) Βρείτε μια λύση με την μορφή σειράς γύρω από τα ανώμαλα σημεία, και δώστε μια έκφραση για την δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση.

γ) Υπολογίστε τις τιμές του λ από την απαίτηση να είναι η λύση πολυωνυμική. Γράψτε τα τέσσερα πρώτα πολυώνυμα.

Θέμα 3: Δείξτε ότι για $-\infty < x < \infty$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{m} \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(m-n)!}\,, \quad x^{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}} \sum_{n=0}^{m} \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(m-n)!}$$

$$e^{ax} = e^{\frac{a^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x)\,, \quad e^{-a^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}} H_{2n}(x)$$

όπου $H_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα Hermite.

Θέμα 4:

Δείξτε ότι αν m και n είναι κα τα δύο μεγαλύτερα από το -1, τότε:

α)

$$I = \int_0^\infty \frac{x^m}{(ax^2+b)^{\frac{m+n+2}{2}}} dx = \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(m+1)]\Gamma[\frac{1}{2}(n+1)]}{2a^{\frac{1}{2}(m+1)}b^{\frac{1}{2}(n+1)}\Gamma[\frac{1}{2}(m+n+2)]}$$

β) Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος

$$S = \int_0^\infty \frac{(x+2)^2}{(x^2+4)^{\frac{5}{2}}} dx$$

Θέμα 5: Βρείτε τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες της Δ.Ε.

$$zw''(z) - 2w'(z) + zw(z) = 0$$

γύρω από το κανονικό ανώμαλο σημείο της. Αποδείξτε με την βοήθεια της Wronskian ότι οι λύσεις που βρήκατε είναι γραμμικά ανεξάρητες.

Θέμα 6: Βρείτε τις ιδιοτιμές λ του ακόλουθου προβλήματος Sturm-Liouville

$$y''(x) + a\delta(x)y(x) + \lambda y(x) = 0\,, \;\; x \in [-\pi, \pi]\,, \;\; y(\pm\pi) = 0\,, \;\; a \in \mathbb{R}$$

και εξετάστε πότε μπορεί να ισχύει $\lambda < 0$. Ποιά θα μπορούσε να είναι η φυσική σημασία του προβλήματος;