

ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ HAWKING ΚΑΙ ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Κατσιάνης Γιώργος

Επιβλέπων Καθηγητής: Αναστάσιος Πέτκου

Abstract

This thesis aims to present the Hawking Radiation and the Information Paradox. At the beginning there is a brief reference to the Schwarzschild's Black Holes and their geometry. We assume that the reader has basic background knowledge of the General Theory of Relativity. Then a detailed introduction to Quantum Field Theory in Flat and Curved Spacetime is presented. After that, we derive the Hawking radiation and at the next chapter a few concepts of Quantum Information, necessary to fully comprehend the Information Paradox, are introduced. Then we present the Information Paradox in detail and we conclude with Quantum Gravity's corrections that however fail to solve the paradox.

Περίληψη

Σκοπός της πτυχιακής αυτής εργασίας είναι η παρουσίαση του φαινομένου της ακτινοβολίας Hawking και του Παραδόξου της Πληροφορίας που προκύπτει από αυτή. Αρχικά γίνεται μία σύντομη αναφορά στις Μελανές Οπές Schwarzschild και τη γεωμετρία τους. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης διαθέτει βασικές γνώσεις πάνω στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία λεπτομερή εισαγωγή στην Κβαντική Θεωρία πεδίου, σε επίπεδο αλλά και σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Έπειτα γίνεται μία αναπαραγωγή της απόδειξης του Hawking για την ακτινοβολία των Μελανών Οπών και στην επόμενη ενότητα αναφέρονται σύντομα έννοιες της Κβαντικής Πληροφορίας, απαραίτητες για την διατύπωση του Παραδόξου της Πληροφορίας. Τέλος παρουσιάζεται διεξοδικά το Παράδοξο της Πληροφορίας και εισάγονται διορθώσεις λόγω Κβαντικής Βαρύτητας που τελικά βλέπουμε ότι δεν είναι ικανές να λύσουν το παράδοξο.

Περιεχόμενα

1	Μελανές Οπές Schwarzschild	5
1.1	Κώνιοι Φωτός	5
1.2	Οι Μελανές Οπές "παγιδεύουν" ακόμη και το Φως	6
2	Κβαντική Θεωρία Πεδίου	10
2.1	Κβαντικός Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής-Εικόνα του Schrodinger	10
2.2	Τελεστές Δημιουργίας και Καταστροφής	11
2.3	Εικόνα Heisenberg	15
2.4	Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Επίπεδο Χωρόχρονο	17
2.5	Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπυλωμένο Χωρόχρονο.	28
3	Ακτινοβολία Hawking	34
3.1	Απόδειξη Ακτινοβολίας Hawking	34
3.2	Σχόλια για την Ακτινοβολία Hawking	42
3.2.1	Περιοχή δημιουργίας σωματιδίων	42
3.2.2	Παραδοχές Hawking	44
4	Κβαντική πληροφορία	45
4.1	"Pure" και "Mixed" Κβαντικές Καταστάσεις	45
4.2	"Density Operator"	47
4.3	"Entanglement"	49
4.4	Εντροπία Von Neumann	51
5	Το Παράδοξο της Πληροφορίας	55

6	Διορθώσεις Κβαντικής Βαρύτητας	63
7	Επίλογος	68

Κεφάλαιο 1

Μελανές Οπές Schwarzschild

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε να μελετήσουμε τη γεωμετρία του χώρου μιας μελανής οπής και να δούμε για ποιο λόγο οι υπολογισμοί του Hawking , που έδειξαν ότι οι τελευταίες ακτινοβολούν προκάλεσαν ιδιαίτερη αίσθηση. Θα εξετάσουμε την πιο απλή περίπτωση ,μια μελανή οπή με μάζα M , χωρίς φορτίο και χωρίς στροφορμή η οποία περιγράφεται από την μετρική Schwarzschild.

1.1 Κώνοι Φωτός

Η μετρική Schwarzschild σε σφαιρικές συντεταγμένες και στο σύστημα μονάδων όπου $G=1$ και $c=1$ δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.1.1)$$

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τους κώνους φωτός στο χωρόχρονο αυτό , με σταθερές τις συντεταγμένες θ και φ . Γνωρίζουμε ότι για τις καμπύλες φωτός ισχύει $ds^2 = 0$. Και εφόσον επιλέξαμε ακτινικές καμπύλες (θ, φ σταθερά) θα έχουμε.

$$ds^2 = 0 \implies - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \implies$$
$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (1.1.2)$$

Η σχέση (1.1.2) αποτελεί την κλίση των ακτινικών φωτοειδών τροχιών σε ένα διάγραμμα t - r . Να σημειώσουμε εδώ ότι παρά το γεγονός πως επιβάλλαμε ακτινικές καμπύλες, οι τροχιές αυτές εξακολουθούν να είναι γεωδαισιακές λόγω σφαιρικής συμμετρίας στην περίπτωσης μας. Παρατηρούμε ότι για $r \rightarrow \infty$ η κλίση $\frac{dt}{dr}$ ισούται με ± 1 , όπως θα περίμενε κανείς άλλωστε, διότι στο $r \rightarrow \infty$ δεν υπάρχει επίδραση της βαρύτητας και ο χωρόχρονος περιγράφεται από την μετρική Minkowski. Από την (1.1.2) επίσης παρατηρούμε ότι για $r > 2M$ όσο πιο κοντά είμαστε στην τιμή $2M$ τόσο μεγαλύτερη κλίση έχει ο κώνος φωτός. Στην τιμή $r = 2M$ μάλιστα έχουμε απειρισμό της. Για $r < 2M$ παρατηρούμε ότι τα στοιχεία g_{tt} και g_{rr} του μετρικού τανυστή από αρνητικά και θετικά που ήταν αλλάζουν πρόσημο και γίνονται θετικά και αρνητικά αντίστοιχα. Αυτό που συμβαίνει δηλαδή είναι ότι η συντεταγμένη t από χρονοειδής γίνεται χωροειδής και η συντεταγμένη r το ανάποδο. Επομένως για αποστάσεις μικρότερες από $2M$ χώρος και χρόνος αλλάζουν έννοιες και οι κώνοι φωτός στρέφονται κατά 90° .

1.2 Οι Μελανές Οπές "παγιδεύουν" ακόμη και το Φως

Γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό σωματίδιο με μάζα ισχύει ότι $ds^2 < 0$.

Επομένως:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 < 0 \implies \frac{dt}{dr} > \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \quad (1.2.1)$$

Άρα η κοσμική ακτινική καμπύλη ενός σωματιδίου θα πρέπει πάντα να βρίσκεται εντός του κώνου φωτός. Αυτό σημαίνει ότι κανένα εισερχόμενο προς την μελανή οπή σωματίδιο δεν μπορεί να περάσει σε απόσταση μικρότερη από $2M$ (όπως αναφέραμε πριν όσο πιο κοντά στο $2M$ τόσο πιο στενός είναι ο κώνος φωτός). Ωστόσο το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο παρά μία "ψευδαίσθηση". Στην πραγματικότητα μία φωτεινή ακτίνα (όπως επίσης και ένα σωματίδιο) μπορεί να φθάσει και να περάσει την απόσταση αυτή. Απλά ένας παρατηρητής στο $r \rightarrow \infty$ δεν μπορεί να παρατηρήσει αυτό το φαινόμενο. Κάτι που εξηγείται ως εξής:

Για το χωροχρονικό μήκος ισχύει ότι $ds^2 = -d\tau^2$ όπου τ είναι ο ιδιοχρόνος ενός παρατηρητή που βρίσκεται σε απόσταση r . Η συντεταγμένη t είναι ο χρόνος που μετρά ένας παρατηρητής στο χωρικό "άπειρο". Για ένα χωροχρονικό γεγονός το οποίο βρίσκεται σε συγκεκριμένη σταθερή θέση ($dr = d\phi = d\theta = 0$) ισχύει πως

$$dt = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau \quad (1.2.2)$$

Από τη σχέση (1.2.2) φαίνεται ότι κοντά στο $r = 2M$ παρόλου που η χρονική απόσταση dt μεταξύ δύο γεγονότων είναι πεπερασμένη, ένας παρατηρητής στο χωρικό "άπειρο" αντιλαμβάνεται τη χρονική αυτή διάρκεια να απειρίζεται. Δηλαδή μπορεί ένα σωματίο να περνά την απόσταση $2M$ σε πεπερασμένο ιδιοχρόνο αλλά στο $r \rightarrow \infty$ θα φανεί ότι το σωματίο δεν μπορεί να φτάσει ποτέ στην απόσταση αυτή.

Βλέπει λοιπόν κανείς ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή της μετρικής Schwarzschild δεν είναι κατάλληλες για να καταλάβουμε τι γίνεται στην περιοχή γύρω από το $r = 2M$. Αυτό οφείλεται κυρίως στον απειρισμό που εμφανίζεται στην μετρική μας τον οποίο θα θέλαμε να αποφύγουμε.

Ορίζουμε την συντεταγμένη

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right| \quad (1.2.3)$$

από την οποία προκύπτει πως

$$dr^* = \left(\frac{r}{r - 2M} \right) dr \quad (1.2.4)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (1.1.2) και (1.2.4) βλέπουμε ότι για τις ακτινικές γεωδαισιακές καμπύλες φωτός ισχύει ότι:

$$d(t \pm r^*) = 0 \quad (1.2.5)$$

Ορίζουμε τώρα τις συντεταγμένες

$$v = t + r^* \quad (1.2.6)$$

$$u = t - r^* \quad (1.2.7)$$

οι οποίες ονομάζονται προηγμένη και καθυστερημένη χρονική συντεταγμένη αντίστοιχα. (Οι συντεταγμένες αυτές θα μας φανούν χρήσιμες και αργότερα στην απόδειξη της ακτινοβολίας Hawking) Η μετρική Schwarzschild μπορεί τώρα να γραφεί ως συνάρτηση των μεταβλητών $(v, r, \vartheta, \varphi)$ οι οποίες είναι γνωστές ως Eddington-Finkelstein.

Προκύπτει λοιπόν:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2 \quad (1.2.8)$$

Όπου $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$

Βλέπουμε εδώ ότι με την αλλαγή συντεταγμένων που κάναμε, για $r = 2M$ δεν υπάρχει κάποιος απειρισμός στην μετρική μας. Ο απειρισμός ήταν τελικά ένα πρόβλημα που οφειλόταν μόνο στην χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων. Για τις ακτινικές γεωδαισιακές καμπύλες του φωτός τώρα θα έχουμε:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2drdv = 0 \Rightarrow$$

$$dv \left(2dr - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv\right) = 0 \Rightarrow$$

$$dv = 0 \Rightarrow$$

$$v = \text{σταθερό} \quad (1.2.9)$$

ή

$$2dr = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv \Rightarrow$$

$$v - 2 \left(r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) = \text{σταθερό} \quad (1.2.10)$$

Η σχέση (1.2.9) πρόκειται μόνο για εισερχόμενες ακτίνες. Εφόσον

$$v = t + r^* = t + r + 2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right|$$

είναι προφανές ότι για να παραμένει σταθερό όσο αυξάνεται ο χρόνος t , τόσο θα πρέπει να μειώνεται η απόσταση r . Για την σχέση (1.2.10) έχουμε ότι

$$v - 2 \left(r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$t - r - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| = \text{σταθερό} \quad (1.2.11)$$

.Θα πρέπει να διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. $r > 2M$: $t - r - 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) = \text{σταθερό}$. Είναι προφανές και πάλι ότι όσο μεγαλώνει ο χρόνος τόσο θα πρέπει να μεγαλώνει ταυτόχρονα και η απόσταση ώστε η ποσότητα αυτή να παραμένει σταθερή. Πρόκειται δηλαδή για εξερχόμενες ακτίνες φωτός

2. $r < 2M: t - r - 2M \ln\left(-\frac{r}{2M} + 1\right) = \text{σταθερό}$. Εφόσον το t μεγαλώνει για να διατηρείται η ποσότητα σταθερή θα πρέπει το $-r - 2M \ln\left(-\frac{r}{2M} + 1\right)$ να μειώνεται. Δεν είναι όμως προφανές τώρα ποια θα πρέπει να είναι η συμπεριφορά της απόστασης r .

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(r) = -r - 2M \ln\left(-\frac{r}{2M} + 1\right) \quad (1.2.12)$$

η οποία έχει παράγωγο

$$f'(r) = \frac{r}{2M - r} \quad (1.2.13)$$

.

Για $r < 2M$ η παράγωγος είναι θετική, επομένως η $f(r)$ είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή όπως είπαμε πριν η $f(r)$ θα πρέπει να μειώνεται, το r θα πρέπει να μειώνεται και αυτό. Άρα στην περίπτωση αυτή για $r < 2M$ δηλαδή έχουμε μόνο εισερχόμενες στην μελανή οπή ακτίνες φωτός.

Συνολικά λοιπόν έχουμε:

- $v = \text{σταθερό} \implies$ Εισερχόμενες φωτεινές ακτίνες
- $v - 2\left(r + 2M \ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right) = \text{σταθερό} \implies \begin{cases} \text{εισερχόμενες φωτεινές ακτίνες} & r < 2M \\ \text{εξερχόμενες φωτεινές ακτίνες} & r > 2M \end{cases}$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το φως (άρα και οτιδήποτε άλλο) δεν μπορεί να ξεφύγει από μία μαύρη τρύπα όταν βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από $r = 2M$. Η ακτίνα αυτή ονομάζεται ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ για τις μελανές οπές Schwarzschild. Αυτό που θα πρέπει να συγχατήσουμε εδώ είναι ότι η κλασική φυσική, δηλαδή η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, προβλέπει ότι τίποτα δεν μπορεί να διαφύγει μίας μελανής οπής. Για το λόγο αυτό οι υπολογισμοί του Hawking που οδήγησαν στο αποτέλεσμα ότι οι μελανές οπές ακτινοβολούν προκάλεσε μεγάλη εντύπωση στην επιστημονική κοινότητα, καθώς έρχονταν σε αντίθεση με τις μέχρι τότε πεποιθήσεις.

Κεφάλαιο 2

Κβαντική Θεωρία Πεδίου

Στο σημείο αυτό θα περάσουμε από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας στην Κβαντομηχανική. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την Κβαντική Θεωρία Πεδίου τόσο σε επίπεδο όσο και σε καμπυλωμένο χωρόχρονο. Σκοπός μας είναι η κατανόηση των "εργαλείων" που είχε στη διάθεσή του ο Hawking, ώστε να μπορέσουμε να αναπαράγουμε τους υπολογισμούς του.

2.1 Κβαντικός Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής-Εικόνα του Schrodinger

Ένα από τα αξιώματα της κβαντομηχανικής είναι ότι ένα σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα ket $|\psi\rangle$, το οποίο είναι ένα διάνυσμα σε κάποιο χώρο Hilbert. Η περιγραφή του $|\psi\rangle$ στη βάση του χώρου θέσης $|x\rangle$, αποτελεί την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$ για την οποία ισχύει :

$$\Psi(x) = \langle x | \psi \rangle \quad (2.1.1)$$

Σύμφωνα με τη θεώρηση του Schrodinger, η κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$ η οποία περιγράφει ένα κβαντικό σύστημα εξελίσσεται με το χρόνο σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση η οποία ονομάζεται εξίσωση Schrodinger.

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(x, t), (\hbar = 1) \quad (2.1.2)$$

Η κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$ δηλαδή εξελίσσεται με το χρόνο με τη βοήθεια ενός μοναδιαίου τελεστή $\hat{U}(t)$ για τον οποίο ισχύει

$$\hat{U}(t) \hat{U}^\dagger(t) = I \quad (2.1.3)$$

Το ίδιο ασφαλώς ισχύει και για το ket $|\psi\rangle$ και έτσι έχουμε:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle \quad (2.1.4)$$

Στην περίπτωση του κβαντικού απλού αρμονικού ταλαντωτή σε μία διάσταση, αφού έχουμε αντιστοιχίσει τους τελεστές θέσης και ορμής ως εξής

$$\hat{x} \longrightarrow x$$

$$\hat{p} \longrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$$

και εισάγουμε τη σχέση μετάθεσης

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \quad (2.1.5)$$

προκύπτει για τον τελεστή Hamilton

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad (2.1.6)$$

Λύνοντας την εξίσωση Schrodinger (η οποία λύση δεν θα γίνει εδώ) προκύπτει ότι οι κυματοσυναρτήσεις που περιγράφουν τον Κ.Α.Α.Τ. είναι οι εξής:

$$\Psi_n(x, t) = e^{(\frac{1}{2})\omega x^2} H_n(\sqrt{\omega}x) e^{-iE_n t} \quad (2.1.7)$$

με n ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και H_n τα πολυώνυμα Hermite βαθμού n . Για τις ιδιοτιμές της ενέργειας αποδεικνύεται ότι

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (2.1.8)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η ενέργεια του κβαντικού Α.Α.Τ. είναι κβαντισμένη, εξαρτάται από το n (που δηλώνει τη στάθμη διέγερσής του), και το κβάντο της ενέργειας ισούται με ω . ($\hbar = 1$)

2.2 Τελεστές Δημιουργίας και Καταστροφής

Κάποιος θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα του Α.Α.Τ. με ένα διαφορετικό τρόπο. Ας ορίσουμε αρχικά τους τελεστές \hat{a} και \hat{a}^\dagger ως εξής:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad \hat{\alpha}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad (2.2.1)$$

Έτσι ώστε

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger) \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger) \quad (2.2.2)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον μεταθέτη τους και να δείξουμε ότι

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1 \quad (2.2.3)$$

Απόδειξη:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger), -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger) \right] = i \Leftrightarrow$$

$$[(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger), (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger)] = -2 \Leftrightarrow$$

$$[(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger), \hat{\alpha}] - [(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger), \hat{\alpha}^\dagger] = -2 \Leftrightarrow$$

$$-[\hat{\alpha}, (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger)] + [\hat{\alpha}^\dagger, (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger)] = -2 \Leftrightarrow$$

$$-[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] - [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] + [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}^\dagger] + [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}] = -2 \Leftrightarrow$$

$$-[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] + [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}] = -2 \Leftrightarrow -2[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = -2 \Leftrightarrow$$

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1$$

Η Χαμιλτονιανή $\hat{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 =$$

$$\frac{1}{2} \left(-i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger) \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger) \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\hat{H} = -\frac{\omega}{4} (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger)^2 + \frac{\omega}{4} (\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger)^2 \Leftrightarrow$$

$$\hat{H} = -\frac{\omega}{4} \hat{\alpha}^2 - \frac{\omega}{4} \hat{\alpha}^{\dagger 2} + \frac{\omega}{2} \hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger + \frac{\omega}{4} \hat{\alpha}^2 + \frac{\omega}{4} \hat{\alpha}^{\dagger 2} + \frac{\omega}{2} \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger + \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha})$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση μετάθεσης των \hat{a}^\dagger και \hat{a}

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (2.2.4)$$

Ονομάζουμε $|n\rangle$ την νιοστή διεγερμένη κατάσταση του κβαντικού Α.Α.Τ. Γνωρίζουμε ότι

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \Leftrightarrow \hat{H} |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega |n\rangle \quad (2.2.5)$$

Από τις σχέσεις (2.2.4) και (2.2.5) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega |n\rangle &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega |n\rangle \Leftrightarrow \\ (\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle &= n |n\rangle \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο τελεστής $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ μας δείχνει τον αριθμό των κβάντων που υπάρχουν σε μία κατάσταση του Α.Α.Τ. Έτσι ορίζουμε τον τελεστή αυτό ως τον τελεστή αρίθμησης

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.2.7)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των \hat{H} , \hat{a} και \hat{a}^\dagger .

$$\begin{aligned} \bullet \left[\hat{H}, \hat{a} \right] &= \left[\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \omega = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a} \right] \omega + \left[\frac{1}{2}, \hat{a} \right] \omega = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a} \right] \omega = \\ &= - \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \omega = -\omega \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] \hat{a} - \hat{a}^\dagger \left[\hat{a}, \hat{a} \right] \omega = -\omega \hat{a} \Leftrightarrow \\ \left[\hat{H}, \hat{a} \right] &= -\omega \hat{a} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} \bullet \left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \right] &= \left[\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a}^\dagger \right] \omega = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] \omega + \left[\frac{1}{2}, \hat{a}^\dagger \right] \omega = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] \omega = \\ &= - \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \hat{a} \right] \omega = -\omega \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \hat{a}^\dagger - \hat{a} \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \right] \omega = \omega \hat{a}^\dagger \Leftrightarrow \\ \left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \right] &= \omega \hat{a}^\dagger \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Από τις σχέσεις (2.2.8) και (2.2.9) μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα σημαντικό συμπέρασμα.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{H}(\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle) &= (\omega\hat{\alpha}^\dagger + \hat{\alpha}^\dagger\hat{H})|n\rangle = \omega\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle + \hat{\alpha}^\dagger\hat{H}|n\rangle \Leftrightarrow \\ \hat{H}(\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle) &= (\omega + E_n)\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned}\hat{H}(\hat{\alpha} |n\rangle) &= (-\omega\hat{\alpha} + \hat{\alpha}\hat{H})|n\rangle = -\omega\hat{\alpha} |n\rangle + E_n\hat{\alpha} |n\rangle \Leftrightarrow \\ \hat{H}(\hat{\alpha} |n\rangle) &= (E_n - \omega)\hat{\alpha} |n\rangle\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

Από τις σχέσεις (2.2.10) και (2.2.11) μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι τα $\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle$ και $\hat{\alpha} |n\rangle$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Hamilton με ιδιοτιμές $\omega + E_n$ και $E_n - \omega$ αντίστοιχα. Δηλαδή ο τελεστής $\hat{\alpha}^\dagger$ εάν δράσει πάνω στην κβαντική κατάσταση $|n\rangle$ την οδηγεί στην αμέσως επόμενη $|n+1\rangle$. Αντίστοιχα ο $\hat{\alpha}$ οδηγεί την $|n\rangle$ στην $|n-1\rangle$. Γι'αυτό και ονομάστηκαν τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε μία κατάσταση $|0\rangle$, στην οποία όταν δρα πάνω της ο τελεστής $\hat{\alpha}$, τότε δεν μπορούμε να πάμε σε χαμηλότερη ενέργεια και ισχύει:

$$\hat{\alpha}|0\rangle = 0 \quad (2.2.12)$$

Η κατάσταση $|0\rangle$ είναι η θεμελιώδης κατάσταση ή κατάσταση του κενού.

Να πούμε ωστόσο ότι όταν δράν οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας η κατάσταση που προκύπτει δεν είναι κανονικοποιημένη.

Δηλαδή $\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle = c_n |n+1\rangle$ και $\hat{\alpha} |n\rangle = b_n |n-1\rangle$.

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}b_n^2 \langle n-1 || n-1\rangle &= \langle n | \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} | n\rangle \Leftrightarrow b_n^2 = \langle n | n | n\rangle \Leftrightarrow \\ b_n &= \sqrt{n}\end{aligned}\quad (2.2.13)$$

Ομοίως:

$$c_n^2 \langle n+1 || n+1\rangle = \langle n | \hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger | n\rangle \Leftrightarrow$$

$$c_n^2 = \langle n | \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + 1 | n \rangle \Leftrightarrow$$

$$c_n = \sqrt{n+1} \quad (2.2.14)$$

Άρα :

$$\hat{\alpha}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2.2.15)$$

$$\hat{\alpha} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (2.2.16)$$

Από τις 2 τελευταίες σχέσεις μπορεί να δείξει εύκολα κάποιος ότι:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{\alpha}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2.2.17)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η κατανόηση των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας στην περίπτωση του κβαντικού απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι απαραίτητη για την κβαντική θεωρία πεδίου και αυτός είναι ο λόγος που τους εξετάσαμε τόσο αναλυτικά.

2.3 Εικόνα Heisenberg

Πιο χρήσιμη στη θεωρία πεδίου είναι η εικόνα του Heisenberg, από την αντίστοιχη προσέγγιση του Schrodinger. Σε αντίθεση με τον τελευταίο, ο Heisenberg θεώρησε ότι οι κβαντικές καταστάσεις παραμένουν σταθερές, ενώ οι τελεστές εξελίσσονται με το χρόνο. Φυσικά οι δύο διαφορετικές αυτές προσεγγίσεις για την κβαντομηχανική θα πρέπει να δίνουν τα ίδια αποτελέσματα. Για παράδειγμα θα πρέπει να αφήνουν ίδια την αναμενόμενη τιμή ενός μεγέθους. Έστω \hat{A} ο τελεστής του μεγέθους του οποίου θέλουμε να βρούμε την μέση τιμή.

- Εικόνα Schrodinger: $\langle A(t) \rangle_S = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle$
- Εικόνα Heisenberg: $\langle A(t) \rangle_H = \langle \Psi(0) | \hat{A}(t) | \Psi(0) \rangle$

Θα πρέπει

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle_S &= \langle A(t) \rangle_H \Leftrightarrow \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{U}(t) | \hat{A} | \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle = \\ &= \langle \Psi(0) | \hat{U}(t)^\dagger \hat{A} \hat{U}(t) | \Psi(0) \rangle = \langle \Psi(0) | \hat{A}(t) | \Psi(0) \rangle = \langle A(t) \rangle_H \end{aligned}$$

Άρα για να ταυτίζονται οι αναμενόμενες τιμές θα πρέπει η χρονική εξέλιξη του τελεστή στην εικόνα Heisenberg να είναι η εξής:

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \quad (2.3.1)$$

Από την εξίσωση Schrodinger ισχύει:

$$i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \Rightarrow i \frac{\partial |\hat{U}(t) \Psi(0)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\hat{U}(t) \Psi(0)\rangle \Rightarrow$$

$$i \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} |\Psi(0)\rangle = (\hat{H} \hat{U}(t)) |\Psi(0)\rangle$$

και επειδή αυτή η σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε $|\Psi(0)\rangle$ προκύπτει ότι:

$$i \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} = \hat{H} \hat{U}(t) \quad (2.3.2)$$

Η εξίσωση κίνησης που ικανοποιούν οι τελεστές $\hat{A}(t)$ στην εικόνα του Heisenberg είναι :

$$i \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{H}] \quad (2.3.3)$$

Απόδειξη:

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \Rightarrow \hat{U}(t) \hat{A}(t) = \hat{A} \hat{U}(t) \Rightarrow$$

έπειτα παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο και έχουμε:

$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt} \hat{A}(t) + \hat{U}(t) \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \hat{A} \frac{d\hat{U}(t)}{dt}$$

όπου με χρήση της (2.3.2) έχουμε

$$-i\hat{H}\hat{U}(t)\hat{A}(t) + \hat{U}(t) \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = -i\hat{A}\hat{H}\hat{U}(t) \Rightarrow \hat{H}\hat{U}(t)\hat{A}(t) + i\hat{U}(t) \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \hat{A}\hat{H}\hat{U}(t) \Rightarrow$$

$$\hat{H}\hat{A}(t) + i\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \hat{U}^\dagger(t)\hat{A}\hat{H}\hat{U}(t) \Rightarrow i\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \hat{A}(t)\hat{H} - \hat{H}\hat{A}(t) \Rightarrow$$

$$i\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{H}]$$

Θεωρήσαμε ότι ο τελεστής \hat{H} μετατίθεται με τον $\hat{U}(t)$ δηλαδή $[\hat{H}, \hat{U}(t)] = 0$ διότι ο \hat{H} δεν εξελίσσεται με το χρόνο.

Για τον κβαντικό Α.Α.Τ. τώρα σύμφωνα με τη σχέση (2.3.3) θα έχουμε για τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας:

$$\frac{d\hat{\alpha}(t)}{dt} = -i\omega\hat{\alpha}(t) \quad \text{και} \quad \frac{d\hat{\alpha}^\dagger(t)}{dt} = i\omega\hat{\alpha}^\dagger(t) \quad (2.3.4)$$

οι οποίες έχουν λύσεις

$$\hat{\alpha}(t) = e^{-i\omega t}\hat{\alpha}(0) \quad \text{και} \quad \hat{\alpha}^\dagger(t) = e^{+i\omega t}\hat{\alpha}^\dagger(0) \quad (2.3.5)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο τελεστής αριθμής διατηρείται:

$$\hat{N}(t) = \hat{\alpha}^\dagger(t)\hat{\alpha}(t) = e^{-i\omega t}\hat{\alpha}(0)e^{+i\omega t}\hat{\alpha}^\dagger(0) = \hat{\alpha}^\dagger(0)\hat{\alpha}(0) = \hat{N}(0)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι και στην εικόνα Heisenberg ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των $\hat{H}, \hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}^\dagger(t)$

- $[\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}^\dagger(t)] = 1$
- $[\hat{H}, \hat{\alpha}^\dagger(t)] = \omega\hat{\alpha}^\dagger(t)$
- $[\hat{H}, \hat{\alpha}(t)] = -\omega\hat{\alpha}(t)$

Απλά θα πρέπει να προσέξουμε ότι αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή.

2.4 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Επίπεδο Χωρόχρονο

Στην κλασική φυσική, σύμφωνα με το Λαγκρανζιανό φορμαλισμό ένα σύστημα περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i στις οποίες αντιστοιχούν οι γενικευμένες ορμές p_i όπου $i = 1, 2, \dots, N$, και N είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Για τα q_i και p_i ισχύουν οι εξής σχέσεις μετάθεσης:

$$[q_i, q_j] = 0 \quad (2.4.1)$$

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (2.4.2)$$

$$[q_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (2.4.3)$$

Ενώ επίσης ισχύει

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.4.4)$$

όπου L είναι η Λαγκρανζιανή του συστήματος .

Αυτά για ένα σύστημα με διακριτό πλήθος βαθμών ελευθερίας. Αν τώρα θέλουμε να περάσουμε στην κλασική θεωρία πεδίου ,εκεί όπου υπάρχει ένα συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας θα πρέπει να κάνουμε τις παρακάτω αντιστοιχίες.

$$q_i \longrightarrow \varphi(\vec{r})$$

$$p_i \longrightarrow \pi(\vec{r})$$

$$\text{με } \pi(\vec{r}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$$

Το $\varphi(\vec{r})$ είναι ένα πεδίο το οποίο εξαρτάται από το σημείο του χώρου στο οποίο βρισκόμαστε. Το ίδιο ισχύει και για τη συζυγή ορμή του πεδίου $\pi(\vec{r})$.Οι σχέσεις μετάθεσης γίνονται τώρα:

$$[\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}')] = 0 \quad (2.4.5)$$

$$[\pi(\vec{r}), \pi(\vec{r}')] = 0 \quad (2.4.6)$$

$$[\varphi(\vec{r}), \pi(\vec{r}')] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.4.7)$$

Όπου αντικαταστήσαμε το σύμβολο Kronecker δ_{ij} με το συνεχές ανάλογό του, τη συνάρτηση δέλτα. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα \mathcal{L} αναφέρεται σε κάθε σημείο του χώρου και η συνολική Λαγκρανζιανή L βρίσκεται ως το ολοκλήρωμα της \mathcal{L} σε όλο το χώρο.

$$L = \int \mathcal{L} d^3x \quad (2.4.8)$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι άπειρος. Ένας τουλάχιστον για κάθε σημείο του χώρου. Η δράση S δίνεται από τη σχέση

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^3x dt \quad (2.4.9)$$

Όπως γνωρίζουμε για την εύρεση των εξισώσεων κίνησης απαιτούμε $\Delta S=0$ και σταθερές συνοριακές συνθήκες στα άκρα της τροχιάς. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int d^3x dt \Delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] \delta \varphi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Ο τελευταίος όρος εφόσον είναι ολικό διαφορικό εξαφανίζεται για κάθε $\delta \varphi(\vec{r}, t)$ που μηδενίζεται στο άπειρο και επίσης ισχύει $\delta \varphi(\vec{r}, t_1) = \delta \varphi(\vec{r}, t_2) = 0$

Άρα από την (2.4.7) έχουμε ότι οι εξισώσεις της κίνησης για το πεδίο φ είναι οι εξής:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0 \quad (2.4.11)$$

Η μετάβαση τώρα από την κλασική στην κβαντική θεωρία πεδίου γίνεται με τη γνωστή μας μέθοδο από την κβαντομηχανική, την προαγωγή των κλασικών ποσοτήτων σε κβαντικούς τελεστές. Έτσι ορίζουμε το τελεστικό πεδίο $\hat{\varphi}(\vec{r}, t)$ με τη συζήγηση του ορμή $\hat{\pi}(\vec{r}, t)$ τα οποία αναφέρονται σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου και του χρόνου. Οι σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν, είναι οι ίδιες με αυτές των (2.4.5)-(2.4.7) με τη μόνη διαφορά ότι πλέον εισέρχεται και ο χρόνος σε αυτές, και οι σχέσεις (2.4.12)-(2.4.14) αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή.

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\varphi}(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.4.12)$$

$$[\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.4.13)$$

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.4.14)$$

Ας δούμε τώρα πως εφαρμόζονται όλα τα προηγούμενα για τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα (την οποία θα λέμε Λαγκρανζιανή από εδώ και στο εξής) που δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \quad (2.4.15)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μετρική Minkowski

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.16)$$

και φ είναι ένα βαθμωτό πραγματικό πεδίο.

Από την (2.4.11) προκύπτει ότι

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \quad (2.4.17)$$

$$\text{με } \square = -\frac{\partial}{\partial t^2} + \nabla^2$$

Η σχέση (2.4.17) αποτελεί την ελεύθερη εξίσωση Klein-Gordon. Γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της έχουν την μορφή επίπεδων κυμάτων. Οπότε μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση ως εξής:

$$\hat{\varphi}(\vec{r}, t) = \sum_k \hat{A}_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{B}_k e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \quad (2.4.18)$$

όπου \vec{k} = κυματοδιάνυσμα

$$\text{και } \omega_k^2 = k^2 + m^2$$

Θα πρέπει $\hat{B}_k = \hat{A}_k^\dagger$ ώστε το φ να είναι άθροισμα συζυγών μιγαδικών στοιχείων, άρα πραγματικός αριθμός όπως απαιτήσαμε αρχικά.

Επομένως:

$$\hat{\varphi}(\vec{r}, t) = \sum_k \hat{A}_k e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{A}_k^\dagger e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \quad (2.4.19)$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι η λύση (2.4.19) μοιάζει αρκετά με τη λύση του κβαντικού Α.Α.Τ. με τον οποίο ασχοληθήκαμε νωρίτερα. Η διαφορά είναι ότι στον Α.Α.Τ έχουμε μία μόνο συχνότητα ω ενώ εδώ υπάρχουν όλες οι δυνατές συχνότητες $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι η λύση μας αποτελείται από "άπειρους" κ.Α.Α.Τ. που ο καθένας έχει συχνότητα που βρίσκεται

μεταξύ 0 και ∞ . Είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι οι συντελεστές του αναπτύγματος \hat{A}_k και \hat{A}_k^\dagger συνδέονται με τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας αντίστοιχα. Κάτι το οποίο θα δείξουμε παρακάτω. Επειδή το k παίρνει συνεχείς τιμές μπορούμε να αντικαταστήσουμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα στην σχέση (2.4.19)

Τώρα αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να κανονικοποιήσουμε κατάλληλα τα επίπεδα κύματα που υπάρχουν στο ανάπτυγμα του πεδίου φ . Στην ουσία θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο από Τρόπους ταλάντωσης (διαφορετικά ω) έτσι ώστε να μπορούμε να εκφράσουμε την κάθε λύση της εξίσωσης (2.4.17) με βάση το σύνολο αυτό. Για να έχει όμως νόημα το ορθοκανονικό θα πρέπει να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των λύσεων της Klein-Gordon. Θεωρούμε λοιπόν το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο πάνω σε μία καθορισμένη χρονικής στιγμής Υπερεπιφάνεια Σ_t .

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = -i \int_{\Sigma_t} (\varphi_1 \partial_t \varphi_2^* - \varphi_2^* \partial_t \varphi_1) d^3x \quad (2.4.20)$$

Ο λόγος που επιλέχθηκε αυτό το εσωτερικό γινόμενο είναι, επειδή είναι ανεξάρτητο της υπερεπιφάνειας Σ_t που καλύπτει έναν όγκο V .

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{t1}} - \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{t2}} &= -i \int_{\Sigma_{\sigma\lambda}} (\varphi_1 \partial_t \varphi_2^* - \varphi_2^* \partial_t \varphi_1) d^3x \quad (\text{Θεώρημα Gauss}) \\ -i \int_V \partial_t (\varphi_1 \partial_t \varphi_2^* - \varphi_2^* \partial_t \varphi_1) d^4x &= -i \int_V (\partial_t \varphi_1 \partial_t \varphi_2^* - \partial_t \varphi_2^* \partial_t \varphi_1 + \varphi_1 \partial_t^2 \varphi_2^* - \varphi_2^* \partial_t^2 \varphi_1) d^4x = \\ -i \int_V [\varphi_1 \varphi_2^* (-m^2 + \nabla^2) - \varphi_2^* \varphi_1 (-m^2 + \nabla^2)] d^4x &= 0 \Rightarrow \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{t1}} &= \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{t2}} \quad (2.4.21) \end{aligned}$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο σε δύο επίπεδα κύματα τα οποία έχουν διαφορετικά κυματοδιανύσματα \vec{k} προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left\langle e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_{k1} t)}, e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_{k2} t)} \right\rangle &= \\ -i \int_{\Sigma_t} \left(e^{-i\omega_{k1} t + i\vec{k}_1 \vec{r}} \partial_t e^{i\omega_{k2} t - i\vec{k}_2 \vec{r}} - e^{i\omega_{k2} t - i\vec{k}_2 \vec{r}} \partial_t e^{-i\omega_{k1} t + i\vec{k}_1 \vec{r}} \right) d^3x &= \\ (\omega_{k1} + \omega_{k2}) e^{-i(\omega_{k1} - \omega_{k2}) t} \int_{\Sigma_t} e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r}} d^3x &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\langle e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_{k_1} t)}, e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_{k_2} t)} \right\rangle = (\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) e^{-i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.4.22)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της δέλτα συνάρτησης

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \vec{r}} d^3x = \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.4.23)$$

Ομοίως

$$\left\langle e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_{k_1} t)}, e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_{k_2} t)} \right\rangle = -(\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t} (2\pi)^3 \delta^3(-\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (2.4.24)$$

$$\left\langle e^{i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_{k_1} t)}, e^{-i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_{k_2} t)} \right\rangle = (\omega_{k_1} - \omega_{k_2}) e^{-i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (2.4.25)$$

$$\left\langle e^{-i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_{k_1} t)}, e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_{k_2} t)} \right\rangle = (-\omega_{k_1} + \omega_{k_2}) e^{i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2})t} (2\pi)^3 \delta^3(-\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.4.26)$$

Αν ορίσουμε τους ορθοκανονικούς Τρόπους

$$f(x^\mu) = \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{\left((2\pi)^3 2\omega_k\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.4.27)$$

Τότε μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι από τις σχέσεις (2.4.22)-(2.4.26) προκύπτει :

$$\langle f_{k_1}, f_{k_2} \rangle = \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.4.28)$$

$$\langle f_{k_1}, f_{k_2}^* \rangle = 0 \quad (2.4.29)$$

$$\langle f_{k_1}^*, f_{k_2} \rangle = 0 \quad (2.4.30)$$

$$\langle f_{k_1}^*, f_{k_2}^* \rangle = -\delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.4.31)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι καλό θα ήταν ,να περιορίσουμε το χώρο στον οποίο ζει το πεδίο ,μέσα σε ένα κουτί όγκου V.Αυτό θα πρέπει να το κάνουμε για να αποφύγουμε ορισμένους ανεπιθύμητους απειρισμούς που θα προέκυπταν διαφορετικά στην Χαμιλτονιανή μας.Επιβάλλοντας περιοδικές συνοριακές συνθήκες οι οποίες περιορίζουν το k σε διάκριτη ακολουθία τιμών $k = \frac{2\pi n}{L}$ με $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ και L το μήκος του κουτιού στη μία διάσταση ,για το πεδίο φ προκύπτει.

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\vec{r}, t) &= \int \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{\alpha}_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \hat{\alpha}_k^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) d^3k \Rightarrow \\ \hat{\varphi}(\vec{r}, t) &= \int \left(\hat{\alpha}_k f_k + \hat{\alpha}_k^\dagger f_k^* \right) d^3k\end{aligned}\quad (2.4.32)$$

όπου τώρα τελικά θα έχουμε για τους Τρόπους ταλάντωσης

$$f_k(x^\mu) = \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{(2\omega_k V)^{\frac{1}{2}}}\quad (2.4.33)$$

όπου

$f_k(x^\mu)$ ονομάζονται Θετικοί Τρόποι ταλάντωσης

$f_k^*(x^\mu)$ ονομάζονται Αρνητικοί Τρόποι ταλάντωσης

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν οι τελεστές $\hat{\alpha}_k$ και $\hat{\alpha}_k^\dagger$. Για την ακρίβεια θα δείξουμε ότι εάν οι τελεστές αυτοί ικανοποιούν τις γνωστές σχέσεις μετάθεσης των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής του χβαντικού Α.Α.Τ., τότε ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης (2.4.12)-(2.4.14)

Δηλαδή :

Εάν

$$[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}] = 0 \quad , \quad [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

Τότε

$$[\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}')] = 0 \quad , \quad [\pi(\vec{r}), \pi(\vec{r}')] = 0 \quad , \quad [\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

Απόδειξη:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -\dot{\varphi} =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(i\omega_k \hat{\alpha}_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} - i\omega_k \hat{\alpha}_k^\dagger e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) d^3 k \Rightarrow$$

$$\hat{\pi}(\vec{r}, t) = i \int \omega_k \left(\hat{\alpha}_k f_k - \hat{\alpha}_k^\dagger f_k^* \right) d^3 k \quad (2.4.34)$$

$$\bullet [\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}')] = \left[\int \left(\hat{\alpha}_k f_k + \hat{\alpha}_k^\dagger f_k^* \right) d^3 k, \int \left(\hat{\alpha}_{k'} f_{k'} + \hat{\alpha}_{k'}^\dagger f_{k'}^* \right) d^3 k' \right] =$$

$$\int \int d^3 k d^3 k' \left([\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}] f_k f_{k'} + [\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] f_k f_{k'}^* + [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}] f_k^* f_{k'} + [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] f_k^* f_{k'}^* \right) =$$

$$\int \int d^3 k d^3 k' (0 + \delta_{kk'} f_k f_{k'}^* - \delta_{kk'} f_k^* f_{k'} + 0) = \int d^3 k (f_k f_k^* - f_k^* f_k) = 0 \Rightarrow$$

$$[\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}')] = 0$$

$$\bullet [\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = \int \int d^3 k d^3 k' \left[i\omega_k \left(\hat{\alpha}_k f_k - \hat{\alpha}_k^\dagger f_k^* \right), i\omega_{k'} \left(\hat{\alpha}_{k'} f_{k'} - \hat{\alpha}_{k'}^\dagger f_{k'}^* \right) \right] =$$

$$- \int \int d^3 k d^3 k' \omega_k \omega_{k'} \left([\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}] f_k f_{k'} - [\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] f_k f_{k'}^* - [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}] f_k^* f_{k'} + [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] f_k^* f_{k'}^* \right) =$$

$$- \int \int d^3 k d^3 k' \omega_k \omega_{k'} (0 - \delta_{kk'} f_k f_{k'}^* + \delta_{kk'} f_k^* f_{k'} + 0) = - \int d^3 k \omega_k^2 (-f_k f_k^* + f_k^* f_k) =$$

$$0 \Rightarrow$$

$$[\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = 0$$

$$\bullet [\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i \int \int d^3 k d^3 k' \omega_{k'} \left[\hat{\alpha}_k f_k + \hat{\alpha}_k^\dagger f_k^*, \hat{\alpha}_{k'} f_{k'} - \hat{\alpha}_{k'}^\dagger f_{k'}^* \right] =$$

$$i \int \int d^3 k d^3 k' \omega_{k'} \left([\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}] f_k f_{k'} - [\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] f_k f_{k'}^* + [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}] f_k^* f_{k'} - [\hat{\alpha}_k^\dagger, \hat{\alpha}_{k'}^\dagger] f_k^* f_{k'}^* \right) =$$

$$i \int \int d^3 k d^3 k' \omega_{k'} (0 - \delta_{kk'} f_k f_{k'}^* - \delta_{kk'} f_k^* f_{k'} + 0) = i \int d^3 k \omega_k (f_k f_k^* + f_k^* f_k) =$$

$$\int 2i\omega_k \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{V(2\pi)^3 2\omega_k} d^3 k = i \int d^3 k \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{V} = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \Rightarrow$$

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να ικανοποιούνται οι σχέσεις μετάθεσης που είχαμε απαιτήσει στην χβαντική θεωρία πεδίου οι τελεστές $\hat{\alpha}_k$ και $\hat{\alpha}_k^\dagger$ θα πρέπει να ικανοποιούν

τις σχέσεις μετάθεσης των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας του χβαντικού A.A.T. Μπορούμε λοιπόν να ακολουθήσουμε και εδώ την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και στον χβαντικό αρμονικό ταλαντωτή. Να ορίσουμε μία κατάσταση, την κατάσταση του κενού $|0\rangle$, για την οποία ισχύει το εξής:

$$\hat{\alpha}_k |0\rangle = 0 \quad \forall k \quad (2.4.35)$$

Όταν δράσουν πάνω της δηλαδή όλοι οι τελεστές καταστροφής $\hat{\alpha}_k$ μας δίνουν μηδέν. Προφανώς όταν δράσει πάνω στην κατάσταση αυτή ο τελεστής δημιουργίας $\hat{\alpha}_k^\dagger$ τότε παίρνουμε μία χβαντική κατάσταση η οποία χαρακτηρίζεται από την ορμή k . Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε ένα σωματίο με ορμή k . Εάν δράσει ο $\hat{\alpha}_k^\dagger$ n φορές τότε προκύπτουν n σωματίια με ορμή k και ισχύει όπως δείξαμε και στον κ.Α.Α.Τ.

$$|n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \left(\hat{\alpha}_k^\dagger\right)^{n_k} |0\rangle \quad (2.4.36)$$

Βέβαια στην κατάσταση $|0\rangle$ μπορούν να δράσουν ταυτόχρονα περισσότεροι του ενός τελεστές δημιουργίας με διαφορετικά k . Η τελική κατάσταση θα αποτελείται συνολικά από αριθμό σωματιδίων που θα είναι ίσος με το πόσες φορές έχουν δράσει συνολικά οι τελεστές δημιουργίας. Το κάθε σωματίο θα έχει ορμή που καθορίζεται από τον αντίστοιχο τελεστή δημιουργίας. Η κατάσταση δηλαδή με n_i διεγέρσεις των διαφορετικών k_i θα είναι:

$$|n_1, n_2 \dots n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_j!}} \left(\hat{\alpha}_{k_1}^\dagger\right)^{n_{k_1}} \left(\hat{\alpha}_{k_2}^\dagger\right)^{n_{k_2}} \dots \left(\hat{\alpha}_{k_j}^\dagger\right)^{n_{k_j}} |0\rangle \quad (2.4.37)$$

Όπως είπαμε εάν σε αυτή την κατάσταση δράσει είτε ένας τελεστής καταστροφής είτε ένας δημιουργίας θα αλλάξουν οι αριθμοί διεγερσης. Δηλαδή:

$$\hat{\alpha}_{k_i} |n_1, n_2 \dots n_i \dots n_j\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2 \dots (n_i - 1) \dots n_j\rangle \quad (2.4.38)$$

$$\hat{\alpha}_{k_i}^\dagger |n_1, n_2 \dots n_i \dots n_j\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2 \dots (n_i + 1) \dots n_j\rangle \quad (2.4.39)$$

Επίσης να ορίσουμε και εδώ τον τελεστή αριθμησης

$$\hat{N}_k = \hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\alpha}_k \quad (2.4.40)$$

ο οποίος μας δείχνει τον αριθμό των σωματιδίων που υπάρχουν σε μία χβαντική κατάσταση με ορμή k . Ισχύει δηλαδή:

$$\hat{N}_{k_i} |n_1, n_2 \dots n_i \dots n_j\rangle = n_i |n_1, n_2 \dots n_i \dots n_j\rangle \quad (2.4.41)$$

Οι κβαντικές καταστάσεις οι οποίες είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή αρίθμησης και δείχνουν τον αριθμό των σωματιδίων που υπάρχουν αλλά και τη ορμή έχουν ,σχηματίζουν μία βάση στο χώρο Hilbert ,γνωστή ως βάση Fock.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής:

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα έχει ήδη παρατηρήσει ,ότι οι υπολογισμοί που πραγματοποιήσαμε και η περιγραφή του βαθμωτού μας πεδίου ϕ με τη βοήθεια των Θετικών και Αρνητικών Τρόπων ταλάντωσης ΔΕΝ είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς. Αυτό φαίνεται διότι το κυματοδιάνυσμα \vec{k} ,η γωνιακή συχνότητα ω ,η θέση \vec{r} και ο χρόνος t από τα οποία εξαρτάται το ανάπτυγμα του πεδίου αλλάζουν σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz ,στο χωρόχρονο Minkowski όταν πηγαίνουμε από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο που κινείται με ταχύτητα \vec{u} ως προς το πρώτο. Το ερώτημα που τίθεται όμως τώρα είναι το εξής:

Ο ορισμός που δώσαμε για το κενό είναι ότι όλοι οι τελεστές καταστροφής \hat{a}_k όταν δράσουν σε αυτό μας δίνουν μηδέν. Είναι φανερό όμως ότι οι τελεστές καταστροφής εξαρτώνται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, διότι διαφορετικό σύστημα σημαίνει διαφορετικό ανάπτυγμα του πεδίου ϕ , επομένως τίποτα δεν μας εξασφαλίζει ότι οι συντελεστές των Θετικών Τρόπων ταλάντωσης θα παραμείνουν οι ίδιοι.

Παράδειγμα :

Εστω ότι επιλέγουμε ένα σύστημα αναφοράς με ιδιοχρόνο t . Τότε οι Θετικοί Τρόποι ταλάντωσης θα είναι οι

$$f_k(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \quad (2.4.42)$$

Εάν διαλέξουμε ένα άλλο σύστημα αναφοράς με ιδιοχρόνο t' θα έχει Θετικούς Τρόπους τους εξής:

$$f_{k'}(\vec{r}', t') = e^{i(\vec{k}'\vec{r}' - \omega_{k'} t')} \quad (2.4.43)$$

Προφανώς το f_k μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των τρόπων ταλάντωσης του συστήματος $\{\vec{r}', t'\}$ μιας και οι τελευταίοι αποτελούν ορθοκανονική βάση. Έτσι θα ισχύει:

$$f_k = \sum_{k'} C_{k'} f_{k'} + D_{k'} f_{k'}^* \quad (2.4.44)$$

Σε περίπτωση τώρα που για κάποιο k' ισχύει ότι $D_{k'} \neq 0$ τότε αυτό σημαίνει ότι στο νέο σύστημα αναφοράς οι συντελεστές \hat{a}_k πλέον είναι συντελεστές όχι μόνο Θετικών αλλά και Αρνητικών τρόπων ταλάντωσης. Άρα ορισμένοι από τους τελεστές \hat{a}_k (όλοι εκ των οποίων ήταν τελεστές καταστροφής στο σύστημα $\{\vec{r}, t\}$

)θα φαίνονται στο δεύτερο σύστημα ως τελεστές δημιουργίας.Επομένως ο ορισμός που δώσαμε για το κενό (σχέση (2.4.35)) δεν θα ισχύει στο δεύτερο σύστημα $\{\vec{r}', t'\}$, διότι εκεί όπως είπαμε κάποιοι \hat{a}_k θα είναι τελεστές δημιουργίας. Δηλαδή $\hat{a}_k |0\rangle \neq 0$. Άρα το κενό δεν θα είναι το ίδιο και για τους δύο παρατηρητές.

Θα αποδείξουμε όμως τώρα ότι στο χωρόχρονο Minkowski το κενό είναι μοναδικό για όλους τους ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΟΥΣ παρατηρητές.

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι οι Θετικοί Τρόποι ταλάντωσης είναι της μορφής $f_k(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)}$. Επομένως για την παράγωγό τους ως προς το χρόνο θα ισχύει:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = -i\omega f_k \quad (2.4.45)$$

Ασφαλώς η σχέση (2.4.45) ισχύει για κάθε σύστημα αναφοράς και είναι χαρακτηριστικό των Τρόπων Θετικής ταλάντωσης, απλώς το t και το ω αναφέρονται στο πως τα βλέπει το κάθε σύστημα.

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz έχουμε:

$$\vec{r}' = \gamma \vec{r} - \gamma \vec{u} t \quad \vec{r} = \gamma \vec{r}' + \gamma \vec{u} t' \quad (2.4.46)$$

$$t' = \gamma t - \gamma \vec{u} \vec{r} \quad t = \gamma t' + \gamma \vec{u} \vec{r}' \quad (2.4.47)$$

$$\omega' = \gamma \omega - \gamma \vec{u} \vec{k} \quad \omega = \gamma \omega' + \gamma \vec{u} \vec{k}' \quad (2.4.48)$$

Έστω οι Θετικοί Τρόποι ταλάντωσης $f'_{k'}(\vec{r}', t') = e^{i(\vec{k}'\vec{r}' - \omega_{k'} t')}$ στο σύστημα $\{\vec{r}', t'\}$,

.Ας δούμε τώρα ποια θα είναι η χρονική τους παράγωγος στο σύστημα $\{\vec{r}', t'\}$.

Έχουμε:

$$\frac{\partial f'_{k'}}{\partial t} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial t} \frac{\partial f'_{k'}}{\partial x'^{\mu}} = -\gamma \vec{u} i \vec{k}' f'_{k'} - \gamma i \omega' f'_{k'} = -i(\gamma \omega' + \gamma \vec{u} \vec{k}') f'_{k'} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f'_{k'}}{\partial t} = -i\omega f'_{k'} \quad (2.4.49)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το $\frac{\partial f'_{k'}}{\partial t}$ συμπεριφέρεται σαν την χρονική παράγωγο ενός Θετικού Τρόπου ταλάντωσης (σχέση (2.4.45)) στο σύστημα αναφοράς $\{\vec{r}', t'\}$.

Άρα οι Θετικοί Τρόποι του ενός συστήματος παραμένουν Θετικοί Τρόποι και στο νέο σύστημα αναφοράς. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι σημαίνει ότι το κενό παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και είναι μοναδικό. Η διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι δύο αδρανειακοί παρατηρητές συμφωνούν ως προς τον αριθμό σωματιδίων που βλέπουν. Απλά βλέπουν τα σωματ-ια αυτά να έχουν διαφορετικές ενέργειες .

2.5 Κβαντική Θεωρία Πεδίου σε Καμπυλωμένο Χωρόχρονο.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να γενικεύσουμε την κβαντική θεωρία πεδίου ,σε οποιονδήποτε χωρόχρονο ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη μετρική g_{ab} . Θα ξεκινήσουμε με τη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \varphi \nabla_b \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \xi R \varphi^2 \right) \quad (2.5.1)$$

όπου g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή g_{ab} , R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci και ∇_a είναι η συναλλοίωτη παράγωγος η οποία αντικατέστησε την απλή παράγωγο της σχέσης (2.4.15). Ο λόγος που βάλουμε στην Λαγκρανζιανή τον όρο $\sqrt{-g}$ είναι εξαιτίας του γεγονότος ότι ο χώρος μας είναι καμπυλωμένος. Στην πραγματικότητα και στη σχέση (2.4.15) υπάρχει ,απλά η ορίζουσα του μετρικού τανυστή Minkowski ισούται με μονάδα. Μπορούμε να διαλέξουμε για την σταθερά ξ την τιμή μηδέν (Minimal Coupling).

Για την κβάντωση όπως και προηγουμένως θεωρούμε ότι

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_0 \varphi)} \Rightarrow \\ \pi &= \sqrt{-g} \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

και θεωρούμε επίσης τις γνωστές σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\varphi}(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.5.3)$$

$$[\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = 0 \quad (2.5.4)$$

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.5.5)$$

Για $\xi = 0$ που επιλέξαμε η εξίσωση της κίνησης είναι η εξής:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\varphi + m^2\varphi = 0 \quad (2.5.6)$$

Και εδώ θα ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο το οποίο υπολογίζεται πάνω σε μία υπερεπιφάνεια Σ με μετρική γ_{ab} και κάθετο διάνυσμα σε αυτή το n^μ .

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = -i \int_{\Sigma} (\varphi_1\nabla_\mu\varphi_2^* - \varphi_2^*\nabla_\mu\varphi_1) n^\mu \sqrt{-\gamma} d\Sigma \quad (2.5.7)$$

Το εσωτερικό αυτό γινόμενο είναι και εδώ ανεξάρτητο της επιφάνειας Σ .

Απόδειξη:

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\Sigma_1} - \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\Sigma_2} = -i \int_{\Sigma_{ολ}} (\varphi_1\nabla_\mu\varphi_2^* - \varphi_2^*\nabla_\mu\varphi_1) n^\mu \sqrt{-\gamma} d\Sigma \xrightarrow{\text{Θεώρημα Gauss}}$$

$$-i \int_V \nabla^\mu (\varphi_1\nabla_\mu\varphi_2^* - \varphi_2^*\nabla_\mu\varphi_1) \sqrt{-g} dV \Rightarrow$$

$$-i \int_V (\nabla^\mu\varphi_1\nabla_\mu\varphi_2^* - \nabla^\mu\varphi_2^*\nabla_\mu\varphi_1 + \varphi_1\nabla^\mu\nabla_\mu\varphi_2^* - \varphi_2^*\nabla^\mu\nabla_\mu\varphi_1) \sqrt{-g} dV =$$

$$-i \int_V (-\varphi_1 m^2\varphi_2^* + \varphi_2^* m^2\varphi_1) \sqrt{-g} dV = 0 \Rightarrow$$

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\Sigma_1} = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\Sigma_2}$$

Σχετικά με το πεδίο φ τώρα, όπως και στο χωρόχρονο Minkowski μπορούμε και εδώ να θεωρήσουμε ότι γράφεται ως ανάπτυγμα Θετικών και Αρνητικών Τρόπων ταλάντωσης:

$$\hat{\varphi} = \sum_i \hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^* \quad (2.5.8)$$

όπου τα f_i και f_i^* είναι οι Θετικοί και Αρνητικοί Τρόποι και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.5.9)$$

$$\langle f_i, f_j^* \rangle = 0 \quad (2.5.10)$$

$$\langle f_i^*, f_j^* \rangle = -\delta_{ij} \quad (2.5.11)$$

Δηλαδή τα $\{f_i, f_i^*\}$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο βάσης. Αποδεικνύεται και πάλι ότι για να ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης (2.5.3)-(2.5.5) θα πρέπει οι τελεστές \hat{a}_i και \hat{a}_i^\dagger να ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας του κ.Α.Α.Τ.Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτή που έγινε στην προηγούμενη ενότητα, στον επίπεδο χωρόχρονο.

Παρόλαυτά υπάρχει μία διαφορά με πριν. Στο χωρόχρονο Minkowski και κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz δείξαμε ότι οι Θετικοί Τρόποι ταλάντωσης παραμένου Θετικοί και οι Αρνητικοί το ίδιο. Επομένως όλοι οι παρατηρητές θα βλέπουν το ίδιο κενό, ή αλλιώς τον ίδιο αριθμό σωματιδίων. Τώρα όμως που βρισκόμαστε σε ένα γενικό καμπύλο χωρόχρονο, δεν υπάρχει κάτι που να μας υπαγορεύει ότι εάν επιχειρήσουμε να αναπτύξουμε το πεδίο ϕ σε σχέση με έναν άλλο παρατηρητή και οι δύο θα βλέπουν τις ίδιες θετικές και τις ίδιες αρνητικές συχνότητες.

Αναπτύσσουμε λοιπόν το ϕ σε σύνολο Θετικών και Αρνητικών Τρόπων σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς.

Έτσι θα έχουμε:

$$\hat{\phi} = \sum_i \hat{b}_i h_i + \hat{b}_i^\dagger h_i^* \quad (2.5.12)$$

Απαιτούμε και εδώ να ισχύει:

$$\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij} \quad (2.5.13)$$

$$\langle h_i, h_j^* \rangle = 0 \quad (2.5.14)$$

$$\langle h_i^*, h_j^* \rangle = -\delta_{ij} \quad (2.5.15)$$

Προφανώς για τους τελεστές \hat{b}_i και \hat{b}_i^\dagger θα ισχύουν οι σχέσεις μετάθεσης των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας.

Και για τους δύο παρατηρητές ορίζεται μία κατάσταση κενού στην οποία όλοι οι τελεστές καταστροφής του καθενός θα την μηδενίζουν. Δηλαδή:

$$\hat{a}_i |0\rangle_a = 0 \quad \forall i \quad (2.5.16)$$

$$\hat{b}_i |0\rangle_b = 0 \quad \forall i \quad (2.5.17)$$

Ωστόσο δεν ξέρουμε εάν ισχύει

$$\hat{a}_i |0\rangle_b = 0 \quad \forall i \quad (2.5.18)$$

$$\hat{b}_i |0\rangle_a = 0 \quad \forall i \quad (2.5.19)$$

Εάν δηλαδή οι δύο παρατηρητές έχουν το ίδιο κβαντικό κενό.

Ορίζουμε και για τους δύο ,τους τελεστές αρίθμησης για την κατάσταση i .

$$\hat{N}_{ia} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (2.5.20)$$

και

$$\hat{N}_{ib} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \quad (2.5.21)$$

Αυτό που θέλουμε να βρούμε είναι τον μέσο αριθμό σωματιδίων που βλέπει ο παρατηρητής b στην κβαντική κατάσταση $|0\rangle_a$ για την κατάσταση i . Πρέπει να υπολογίσουμε δηλαδή το

$$\langle 0 | {}_a \hat{N}_{ib} | 0 \rangle_a = \langle 0 | {}_a \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0 \rangle_a \quad (2.5.22)$$

Τα $\{h_i, h_i^*\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση , άρα μπορούμε να περιγράψουμε τους Τρόπους ταλάντωσης f_i ως προς αυτά. Θα έχουμε δηλαδή

$$f_i = \sum_j A_{ij} h_j + B_{ij} h_j^* \quad (2.5.23)$$

Αντίστοιχα για τα h_i θα έχουμε:

$$h_i = \sum_j A'_{ij} f_j + B'_{ij} f_j^* \quad (2.5.24)$$

όπου

$$A' = A^\dagger \quad B' = -B^T \quad (2.5.25)$$

Οι συντελεστές A_{ij} και B_{ij} ονομάζονται συντελεστές Bogoliubov.

Απόδειξη:

$$\langle f_i, h_j \rangle = A_{ij} = \langle h_j, f_i \rangle^* = A_{ji}^* \Rightarrow A' = A^\dagger$$

$$\langle f_i, h_j^* \rangle = -B_{ij} = \langle h_j^*, f_i \rangle^* = (B_{ji}')^* \Rightarrow B' = -B^T$$

Από την σχέση (2.5.9) έχουμε ότι:

$$\langle f_i, f_k \rangle = \delta_{ik} \Rightarrow \left\langle \sum_j A_{ij} h_j + B_{ij} h_j^*, \sum_l A_{kl} h_l + B_{kl} h_l^* \right\rangle =$$

$$\sum_j \sum_l (A_{ij} A_{kl} \langle h_j, h_l \rangle + A_{ij} B_{kl} \langle h_j, h_l^* \rangle + B_{ij} A_{kl} \langle h_j^*, h_l \rangle + B_{ij} B_{kl} \langle h_j^*, h_l^* \rangle) =$$

$$\sum_j \sum_l (A_{ij} A_{kl} \delta_{jl} - B_{ij} B_{kl} \delta_{jl}) = \sum_j \sum_l (A_{ij} A_{kl} - B_{ij} B_{kl}) \delta_{jl} \Rightarrow$$

$$(AA^\dagger - BB^\dagger)_{ik} = \delta_{ik} \quad (2.5.26)$$

Η σχέση (2.5.26) θα μας φανεί χρήσιμη στην απόδειξη της ακτινοβολίας Hawking στη συνέχεια.

As επιστρέψουμε τώρα στον υπολογισμό της σχέσης (2.5.22).

Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ των τελεστών $\{\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger\}$ και $\{\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger\}$.

Έχουμε ότι:

$$\hat{b}_i = \langle \varphi, h_i \rangle = \left\langle \sum_k \hat{a}_k f_k + \hat{a}_k^\dagger f_k^*, \sum_j A_{ji}^* f_j - B_{ji} f_j^* \right\rangle =$$

$$\sum_{kj} \langle \hat{a}_k f_k, A_{ji}^* f_j \rangle + \langle \hat{a}_k f_k, -B_{ji} f_j^* \rangle + \langle \hat{a}_k^\dagger f_k^*, A_{ji}^* f_j \rangle + \langle \hat{a}_k^\dagger f_k^*, -B_{ji} f_j^* \rangle =$$

$$\sum_{kj} \hat{a}_k A_{ji} \delta_{kj} + \hat{a}_k^\dagger B_{ji}^* \delta_{kj} \Rightarrow$$

$$\hat{b}_i = \sum_k \hat{a}_k A_{ki} + \hat{a}_k^\dagger B_{ki}^* \quad (2.5.27)$$

Επομένως για το \hat{b}_i^\dagger προκύπτει:

$$\hat{b}_i^\dagger = \sum_k \hat{a}_k B_{ki} + \hat{a}_k^\dagger A_{ki}^* \quad (2.5.28)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \langle 0 | {}_a \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0 \rangle_a &= \left\langle 0 \left| {}_a \left(\sum_k \hat{a}_k B_{ki} + \hat{a}_k^\dagger A_{ki}^* \right) \left(\sum_l \hat{a}_l A_{li} + \hat{a}_l^\dagger B_{li}^* \right) \right| 0 \right\rangle_a = \\ &= \sum_{kl} \langle 0 | {}_a \hat{a}_k B_{ki} \hat{a}_l^\dagger B_{li}^* | 0 \rangle_a = \sum_{kl} \langle 0 | {}_a B_{ki} (\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k + \delta_{lk}) B_{li}^* | 0 \rangle_a \\ &= \sum_{kl} \langle 0 | {}_a B_{ki} \delta_{lk} B_{li}^* | 0 \rangle_a = \sum_k \langle 0 | {}_a B_{ki} B_{ki}^* | 0 \rangle_a = \sum_k B_{ki} B_{ki}^* \Rightarrow \\ &= \langle 0 | {}_a \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0 \rangle_a = (B^\dagger B)_{ii} \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Η σχέση (2.5.29) μας δείχνει κάτι πολύ ενδιαφέρον. Εάν κάποιος από τους συντελεστές B_{ki} είναι διάφορος του μηδενός τότε ο παρατηρητής B θα βλέπει σωματίδια στο κενό του παρατηρητή A στην κατάσταση i . Ο συνολικός αριθμός σωματιδίων που θα βλέπει ο B θα είναι

$$tr (B^\dagger B) \quad (2.5.30)$$

Επομένως για να είναι η χβαντική κατάσταση $|0\rangle_a$ κενό και για τους δύο παρατηρητές θα πρέπει ο πίνακας B να είναι μηδενικός. Δηλαδή δεν θα πρέπει να έχουμε ανάμειξη Θετικών και Αρνητικών Τρόπων f στα αναπτύγματα των Τρόπων h .

Κεφάλαιο 3

Ακτινοβολία Hawking

3.1 Απόδειξη Ακτινοβολίας Hawking

Με όλη τη δουλειά που κάναμε μέχρι τώρα ,είμαστε πλέον σε θέση να μπορέσουμε να κατανοήσουμε και να παρουσιάσουμε μία "απλουστευμένη" εκδοχή της απόδειξης που πραγματοποίησε ο Hawking για την ακτινοβολία των μελανών οπών.

Στην περίπτωση λοιπόν αυτή ο χωρόχρονος μπορεί να "χωριστεί" σε τρεις περιοχές.

- Περιοχή I: Μακρινό παρελθόν ,πολύ πριν σχηματιστεί η μαύρη τρύπα.Η περιοχή αυτή θα είναι επίπεδη.
- Περιοχή II:Χώρος γύρω από τη μελανή οπή αφού αυτή έχει σχηματιστεί.Ο χωρόχρονος εκεί θα είναι καμπυλωμένος.
- Περιοχή III: Πολύ μακριά από τη μαύρη τρύπα σε χρόνο αρκετά μεταγενέστερο της βαρυτικής κατάρρευσης.Ο χωρόχρονος εκεί θεωρείται επίπεδος καθώς η επίδραση της βαρύτητας είναι αμελητέα.

Εάν τώρα έχουμε ένα θετικό τρόπο ταλάντωσης στην πρώτη περιοχή ,ο τρόπος αυτός όταν θα φτάσει στην τρίτη περιοχή δεν είναι απαραίτητο να εξακολουθεί και εκεί να είναι μόνο θετικός.Και αυτό διότι κατά τη διαδρομή του έχει περάσει μέσα από την Περιοχή II που ο χωρόχρονος είναι καμπυλωμένος.Ένα απλό παράδειγμα για να καταλάβει κάποιος το πως η "καμπυλωμένη" περιοχή μπορεί ένα θετικό τρόπο να τον μετατρέψει σε άθροισμα τόσο θετικών όσο και αρνητικών είναι το εξής:

Θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι η αρχική κβαντική κατάσταση η οποία βρίσκεται στον επίπεδο χωρόχρονο της Περιοχής I όταν περάσει από την Περιοχή II είναι σαν να εφαρμόζεται στο σύστημά μας ένα καινούριο δυναμικό V.Το δυναμικό αυτό όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία διαταραχών στην κβαντομηχανική θα αλλάξει

την αρχική μας κβαντική κατάσταση σε μία νέα. Σε μερικές περιπτώσεις η αλλαγή μπορεί να είναι τέτοια ώστε ένας θετικός τρόπος ταλάντωσης στην τρίτη περιοχή να φαίνεται ως μίξη θετικών και αρνητικών. Θα μπορούσε λοιπόν να ερμηνεύσει κανείς ότι το βαρυτικό πεδίο της Περιοχής II προκάλεσε τη δημιουργία ορισμένων σωματιδίων του βαθμωτού μας πεδίου.

Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε ότι η βαρυτική κατάρρευση είναι σφαιρικά συμμετρική και η μελανή οπή που θα σχηματιστεί δεν έχει φορτίο. Έτσι ο χώρος έξω από το σώμα που καταρρέει θα περιγράφεται από τη μετρική Schwarzschild.

Η μελέτη μας θα γίνει στο διάγραμμα Penrose, εκεί όπου έχουν γίνει συγκεκριμένοι μετασχηματισμοί με τη βοήθεια των οποίων το "άπειρο" απεικονίζεται γραφικά. Οι ευθείες που σχηματίζουν $\pm 45^\circ$ γωνία είναι φωτεινές γεωδαισιακές. Για τους άξονες U και V ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί:

$$U = -e^{\frac{-u}{4M}} \quad (3.1.1)$$

$$V = e^{\frac{v}{4M}} \quad (3.1.2)$$

όπου u και v είναι η καθυστερημένη και προηγμένη χρονική συντεταγμένη αντίστοιχα.

- H^+ : είναι ο ορίζοντας γεγονότων εντός του οποίου καμμία κοσμική γραμμή δεν μπορεί να φτάσει το χωρικό "άπειρο".
- \mathfrak{S}^+ : Στην περιοχή αυτή έχουμε $r \rightarrow \infty$ και $t \rightarrow \infty$
- \mathfrak{S}^- : Στην περιοχή αυτή έχουμε $r \rightarrow \infty$ και $t \rightarrow -\infty$
- i_0 : έχουμε πεπερασμένο t και $r \rightarrow \infty$

Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης διαθέτει στοιχειώδεις γνώσεις πάνω σε διαγράμματα Penrose επομένως δεν θα τα σχολιάσουμε περισσότερο.

Θεωρούμε τώρα ένα βαθμωτό πεδίο φ χωρίς μάζα. Το πεδίο αυτό θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \varphi = 0 \quad (3.1.3)$$

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε πριν μπορούμε να γράψουμε το φ ως άθροισμα θετικών και αρνητικών τρόπων ταλάντωσης. Οι εξερχόμενοι, θετικοί τρόποι στο \mathfrak{S}^+ θα είναι της μορφής

$$f_\omega \sim e^{-i\omega u} \quad (3.1.4)$$

Αυτό είναι κάτι που μπορεί να το δει κανείς διότι στο \mathfrak{S}^+ , το $r \rightarrow \infty$ οπότε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u = \lim_{r \rightarrow \infty} t - r^* = t - \lim_{r \rightarrow \infty} r^* = t - r$$

Εφόσον

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right| \Rightarrow \frac{r^*}{r} = 1 + \frac{2M \ln \left| \frac{r - 2M}{2M} \right|}{r} \Rightarrow$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^*}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2M \ln \frac{r - 2M}{2M}}{r} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$r^* = r \quad \text{για } r \rightarrow \infty$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στο $r \rightarrow \infty$ το $e^{-i\omega u}$ γίνεται $e^{-i\omega(t-r)}$ που προφανώς είναι θετικός τρόπος ταλάντωσης. Επειδή το πεδίο φ είναι άμαζο το k ισούται με το ω . Και το γεγονός ότι χαρακτηρίσαμε το $e^{-i\omega u}$ εξερχόμενο τρόπο ισχύει διότι, εάν διατηρήσουμε σταθερή τη φάση ωu αν αυξάνεται ο χρόνος t τότε θα πρέπει να αυξάνεται και το r . ($u = t - r^* \Rightarrow t - r^* = \text{σταθερό}$)

Θεωρούμε τώρα ότι στο \mathfrak{S}^+ έχουμε έναν θετικό τρόπο ταλάντωσης $f_\omega \sim e^{-i\omega u}$. Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να εντοπίσουμε το f_ω πίσω στο χρόνο και να δούμε τι μορφή έχει στο \mathfrak{S}^- . Κάνουμε επιπλέον την υπόθεση ότι το f_ω έφτασε στο \mathfrak{S}^+ (ή θα φτάσει) σε χρόνο που τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι ο θετικός τρόπος καθώς απομακρύνεται από τη μελανή οπή, σε μικρούς χρόνους αφού η τελευταία δημιουργήθηκε, βρίσκεται πολύ κοντά στον ορίζοντα H^+ . Μία επιπλέον υπόθεσή μας είναι ότι το f_ω καθώς κινείται πίσω στο χρόνο (διαδικασία που κάνουμε εμείς όπως είπαμε για να βρούμε τη μορφή του στο \mathfrak{S}^-) η κίνησή του αυτή μπορεί να προσεγγιστεί από μεθόδους γεωμετρικής οπτικής. Να θεωρήσουμε δηλαδή ότι το f_ω ακολουθεί μία φωτοειδή γραμμή γ (εφόσον το πεδίο φ είναι άμαζο) η οποία έχει σταθερή φάση ωu . Τη θέση της γραμμής γ μπορούμε να την προσδιορίσουμε δίνοντας την αφινική της απόσταση από τον ορίζοντα H^+ κατά μήκος μίας εισερχόμενης φωτοειδούς γεωδαισιακής. Κοντά στον ορίζοντα η αφινική παράμετρος της εισερχόμενης αυτής γεωδαισιακής είναι το U . Εφόσον σύμφωνα με την πρώτη υπόθεσή μας το f_ω είναι πολύ κοντά στον ορίζοντα θα έχουμε $U = -\varepsilon$ όπου ε πολύ μικρό. Εύκολα μπορεί να δει κανείς τώρα ότι η δεύτερη υπόθεσή μας, για την προσέγγιση της γεωμετρικής οπτικής μπορεί να προκύψει από την πρώτη. Και αυτό διότι:

$$U = -\varepsilon \Rightarrow -e^{\frac{-u}{4M}} = -\varepsilon \Rightarrow -\frac{u}{4M} = \ln \varepsilon \Rightarrow$$

$$u = -4M \ln \varepsilon \quad (3.1.5)$$

Για $\varepsilon \rightarrow 0$ για τη φάση $\Phi = \omega u$ του f_ω έχουμε:

$$d\Phi = \omega du = -4M \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$d\Phi \rightarrow \infty \quad (3.1.6)$$

Από τη σχέση (3.1.6) βλέπουμε ότι για $\varepsilon \rightarrow 0$ η διαφορά φάσης μεταξύ δύο γειτονικών περιοχών ($d\varepsilon$) τείνει στο άπειρο. Γνωρίζουμε ότι εάν δύο γειτονικά σημεία έχουν τεράστια διαφορά φάσης αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πάρα πολλά μήκη κύματος μεταξύ τους, ή αλλιώς η συχνότητα ταλάντωσης του τρόπου γίνεται πολύ μεγάλη. Και φυσικά αυτή η μεγάλη συχνότητα είναι που δικαιολογεί την προσέγγιση της γεωμετρικής οπτικής που χρησιμοποιούμε. Καθώς τώρα το f_ω κινείται πίσω στο χρόνο όταν φτάσει στο $r = 0$ θα "ανακλαστεί" στο διάγραμμα (στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κάποια ανάκλαση απλά ο Τρόπος περνά από το κέντρο της καταρρέουσας μάζας) και στη συνέχεια θα ακολουθήσει μία φωτεινή γραμμή κάθετη με την προηγούμενη. Η τελευταία θα συναντήσει το \mathfrak{S}^- και θα χαρακτηρίζεται από αφινική απόσταση ε από τον παρελθοντικό ορίζοντα, κατά μήκος τώρα μίας εξερχόμενης φωτεινής γεωδαισιακής στο \mathfrak{S}^- . Στο \mathfrak{S}^- η μετρική δίνεται ως εξής:

$$ds^2 = -dvdu + r^2 d\Omega^2 \quad (3.1.7)$$

Δηλαδή έχουμε χωρόχρονο Minkowski. Η αφινική παράμετρος τώρα θα είναι η v . Άρα εφόσον η φάση του f_ω είναι σταθερή ο τελευταίος θα περιγράφεται στο \mathfrak{S}^- από την εξής σχέση:

$$f_\omega \sim e^{i\omega 4M \ln \varepsilon} \Rightarrow$$

$$f_\omega \sim e^{i\omega 4M \ln(-v)} \quad (3.1.8)$$

Αυτό βέβαια για $v < 0$. Για $v > 0$ κάθε εισερχόμενη φωτεινή ακτίνα που προέρχεται από το \mathfrak{S}^- δεν φτάνει ποτέ στο \mathfrak{S}^+ , διότι περνά μέσα από τον ορίζοντα H^+ . Δηλαδή για $v = 0$ είναι ο "χρόνος" στον οποίο δημιουργήθηκε η μελανή οπή και άρα ο ορίζοντας H^+ . Επομένως για $v > 0$ $f_\omega = 0$

$$f_\omega(v) = \begin{cases} 0 & v > 0 \\ e^{i\omega 4M \ln(-v)} & v < 0 \end{cases} \quad (3.1.9)$$

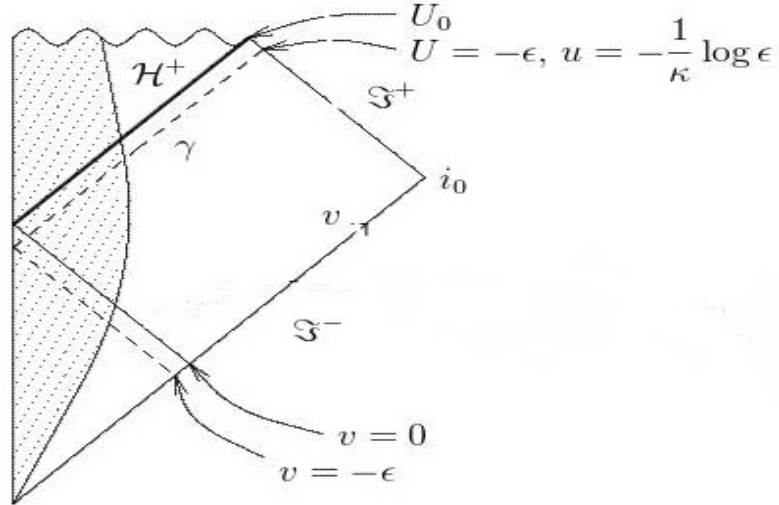


Figure 3.1.1:
Διάγραμμα Penrose βαρυτικής κατάρρευσης.

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε τώρα είναι να περιγράψουμε το $f_\omega(v)$ ως γραμμικό συνδυασμό εισερχόμενων θετικών και αρνητικών τρόπων ταλάντωσης στο \mathfrak{S}^- που είναι της μορφής

$$e^{\pm i\omega'v} \quad (3.1.10)$$

Δηλαδή

$$f_\omega(v) = \sum_{\omega'} A_{\omega\omega'} e^{-i\omega'v} + B_{\omega\omega'} e^{+i\omega'v}$$

Για ποιο λόγο η (3.1.10) περιγράφει εισερχόμενους αρνητικούς και θετικούς τρόπους στο \mathfrak{S}^- μπορεί να το δεί κανείς με την ίδια λογική που εξετάσαμε τους θετικούς τρόπους $e^{-i\omega u}$ στο \mathfrak{S}^+ προηγουμένως.

Σύμφωνα τώρα με τους μετασχηματισμούς Fourier, οι συντελεστές $A_{\omega\omega'}$ των θετικών τρόπων ταλάντωσης $e^{-i\omega'v}$ στο \mathfrak{S}^- , του αναπτύγματος του $f_\omega(v)$ ως προς τους τρόπους $e^{\pm i\omega'v}$ θα είναι:

$$A_{\omega\omega'} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^0 dv e^{i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln(-v)} \quad (3.1.11)$$

Ενώ οι συντελεστές των αρνητικών τρόπων $e^{+i\omega'v}$ στο \mathfrak{S}^- είναι:

$$B_{\omega\omega'} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^0 dv e^{-i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln(-v)} \quad (3.1.12)$$

Θέτουμε $v = -v$ οπότε προκύπτει:

$$A_{\omega\omega'} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^{\infty} dv e^{-i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln v} \quad (3.1.13)$$

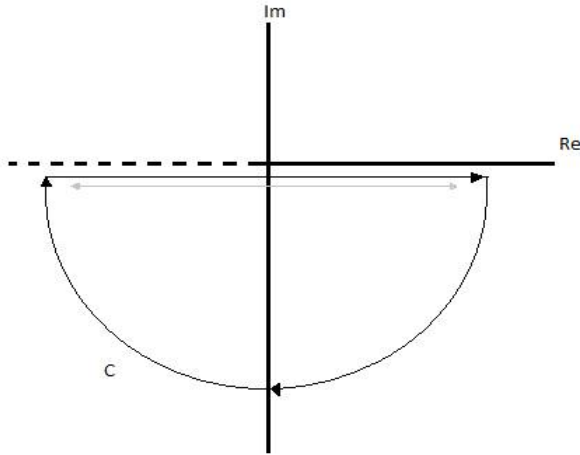
$$B_{\omega\omega'} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^{\infty} dv e^{i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln v} \quad (3.1.14)$$

Οι σχέσεις (3.1.13) και (3.1.14) είναι παντού αναλυτικές στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα διότι ο λογάριθμος γίνεται αρνητικός.

Ισχύει ότι:

$$\oint_C dv e^{i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln v} = 0 \quad (3.1.15)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην καμπύλη C που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ολοκλήρωμα (3.1.15) ισούται με μηδέν καθώς εντός της καμπύλης C δεν υπάρχουν ανώμαλα σημεία.



$$\oint_c dve^{i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln v} =$$

$$\int_0^\infty dve^{-i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln v} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 dve^{-i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln(v+i\varepsilon)} + \int_0^{-\pi} d\theta e^{-i\omega' R e^{i\theta}} e^{i\omega 4M \ln(R e^{i\theta})} = 0$$

όπου $R \rightarrow \infty$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^{-\pi} d\theta e^{-i\omega' R e^{i\theta}} e^{i\omega 4M \ln(R e^{i\theta})}$ είναι ίσο με μηδέν διότι
 $e^{-i\omega' R e^{i\theta}} = e^{-i\omega' R \cos \theta} e^{-i\omega' R i \sin \theta} = e^{-i\omega' R \cos \theta} e^{\omega' R \sin \theta}$

Επειδή $\sin \theta < 0$ για $R \rightarrow \infty$ το $e^{\omega' R \sin \theta} \rightarrow 0$. Άρα συνολικά το ολοκλήρωμα αυτό μηδενίζεται.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\int_0^\infty dve^{-i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln v} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dve^{i\omega'v} e^{i\omega 4M \ln(-v-i\varepsilon)} = 0 \quad (3.1.16)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(-v-i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln(-1) + \ln(v+i\varepsilon) = -i\pi + \ln v \quad (3.1.17)$$

Από τις σχέσεις (3.1.13),(3.1.14),(3.1.16),(3.1.17) προκύπτει ότι

$$|A_{\omega\omega'}| = e^{4\pi M\omega} |B_{\omega\omega'}| \Rightarrow$$

$$B_{ij} = -e^{-\pi\omega_i 4M} A_{ij} \quad (3.1.18)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ένας θετικός τρόπος ταλάντωσης στο \mathfrak{Z}^+ αντιστοιχεί σε άθροισμα θετικών και αρνητικών τρόπων ταλάντωσης στο \mathfrak{Z}^- . Οι συντελεστές $A_{\omega\omega'}$ και $B_{\omega\omega'}$ θα πρέπει επίσης να ικανοποιούν την σχέση (2.5.26). Θα έχουμε λοιπόν:

$$(AA^\dagger - BB^\dagger)_{ij} = \delta_{ij} = \sum_k A_{ik} A_{jk}^* - B_{ik} B_{jk}^* =$$

$$\left(e^{\pi(\omega_i + \omega_j) 4M} - 1 \right) \sum_k B_{ik} B_{jk}^*$$

θέτοντας $i = j$ έχουμε

$$(BB^\dagger)_{ii} = \frac{1}{e^{2\pi\omega_i 4M} - 1} \quad (3.1.19)$$

Αυτό που χρειαζόμαστε εμείς ωστόσο είναι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Bogoliubov, διότι θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει με έναν θετικό τρόπο ταλάντωσης (κενό) που ξεκινά από το \mathfrak{S}^- . και φτάνει στη συνέχεια στο \mathfrak{S}^+ ως μίξη θετικών και αρνητικών τρόπων. (σωματίδια)

Έχουμε ότι $B' = -B^T$ ενώ ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην i κατάσταση στο \mathfrak{S}^+ είναι:

$$\begin{aligned} \langle N_i \rangle_{\mathfrak{S}^+} &= (B'^\dagger B')_{ii} = ((-B^*) (-B^T))_{ii} = \\ &= (B^* B^T)_{ii} = (BB^{*T})_{ii}^* = \\ (BB^\dagger)_{ii}^* &= \left(\frac{1}{e^{2\pi\omega_i 4M} - 1} \right)^* = \frac{1}{e^{2\pi\omega_i 4M} - 1} \Rightarrow \\ \langle N_i \rangle_{\mathfrak{S}^+} &= \frac{1}{e^{2\pi\omega_i 4M} - 1} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Η σχέση (3.1.20) έχει την ίδια μορφή με την κατανομή Planck για την ακτινοβολία μέλαν σώματος. Προκύπτει λοιπόν ότι η μελανή οπή ακτινοβολεί σωματίδια με θερμοκρασία που είναι ίση με :

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi M} \quad (3.1.21)$$

Ενώ για το μήκος κύματος των εκπεμπόμενων σωματιδίων με τη μέγιστη ένταση μπορεί να δείχθει από την κατανομή Planck ότι :

$$\lambda \sim M \quad (3.1.22)$$

Για την ενέργεια της μελανής οπής ισχύει ότι είναι ανάλογη της μάζας της. Επειδή είδαμε ότι η ακτινοβολία της δίνεται από σχέση ίδια με την σχέση του Planck μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας της μαύρης τρύπας θα δίνεται από το νόμο του Stefan -Boltzmann.

Άρα θα έχουμε:

$$E \sim M \quad (3.1.23)$$

$$\frac{dE}{dt} \sim -AT_H^4 \quad (3.1.24)$$

όπου A είναι η επιφάνεια της μελανής οπής και ισχύει:

$$A \sim M^2 \quad (3.1.25)$$

Από τις τρεις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = \frac{dE}{dt} &\sim -AT_H^4 \sim -\frac{\hbar}{M^2} \Rightarrow \\ \frac{dM}{dt} &\sim -\frac{\hbar}{M^2} \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της μάζας της μαύρης τρύπας είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου της μάζας της.

3.2 Σχόλια για την Ακτινοβολία Hawking

3.2.1 Περιοχή δημιουργίας σωματιδίων

Αυτό που καταφέραμε να δείξουμε προηγουμένως είναι το εξής:

Ένας θετικός τρόπος ταλάντωσης που ταξιδεύει από το \mathfrak{S}^- προς το \mathfrak{S}^+ , ενώ πρώτα περάσει από τον καμπυλωμένο χωρόχρονο γύρω από μια μελανή οπή, τελικά μπορεί να καταλήξει ως μίξη θετικών και αρνητικών τρόπων και να έχουμε την ύπαρξη σωματιδίων στο \mathfrak{S}^+ . Ωστόσο από την απόδειξη της ακτινοβολίας Hawking που δείξαμε πριν, είναι δύσκολο να καταλάβει κάποιος που παράγονται τα σωματίδια.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ένα επιχειρήμα γιατί παράγονται ζεύγη σωματιδίων, ένα εντός και ένα εκτός του ορίζοντα γεγονότων.

Το γεγονός ότι παράγονται ζεύγη σωματιδίων θα το δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο αναλυτικά. Θα μπορούσαμε παρόλαυτά να πούμε σε αυτό το σημείο, ότι χρειαζόμαστε δημιουργία ζευγών και όχι μονών σωματιδίων για να ισχύουν διάφορες αρχές διατήρησης. (πχ ορμής)

Για την περιοχή δημιουργίας τώρα μπορούμε να σκεφτούμε το εξής:

Μας είναι ήδη γνωστές οι χβαντικές διακυμάνσεις του κενού, εκεί όπου δημιουργούνται ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων. Στη συνέχεια ωστόσο "αλληλοαναιρούνται" μεταξύ τους διότι η δημιουργία ενός "μόνιμου" ζεύγους σωματιδίων θα παραβίαζε την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Κάθε σωματίδιο (αντισωματίδιο) θα πρέπει να έχει θετική ενέργεια ώστε να υπάρξει και να μην είναι δυνητικό. Όμως το κενό έχει μηδενική ενέργεια. Επομένως γι' αυτό δε θα μπορούσε να δημιουργηθεί στο κενό ζεύγος σωματιδίων. Στην περιοχή γύρω από τον ορίζοντα μίας μελανής οπής ωστόσο τα πράγματα είναι διαφορετικά.

Και εκεί δημιουργούνται λόγω κβαντικών διακυμάνσεων ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων. Επειδή η περιοχή γύρω από τον ορίζοντα είναι κενό θα πρέπει λόγω διατήρησης ενέργειας ένα εκ των δύο, είτε το σωματίο είτε το αντισωματίο να έχει αρνητική ενέργεια. Αρνητική ενέργεια όμως σημαίνει ότι είναι δυνητικό και δεν μπορεί να υπάρξει ή να παρατηρηθεί.

Έστω ξ το διάνυσμα killing της μετρικής Schwarzschild

$$\xi = (1, 0, 0, 0) \quad (3.2.1)$$

p και p' οι τετραορμές του σωματίου και αντισωματίου αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι οι ποσότητες $\xi^a p_a$ και $\xi^a p'_a$ είναι διατηρούμενες ποσότητες. Ας θεωρήσουμε ένα παρατηρητή A ο οποίος έχει ταχύτητα u^a παράλληλη με το διάνυσμα ξ . ($u^a = \xi^a$). Τότε οι ποσότητες $-\xi^a p_a$ και $-\xi^a p'_a$ αποτελούν τις ενέργειες του σωματίου-αντισωματίου για τον παρατηρητή A . Θα ισχύει σύμφωνα με τη διατήρηση της ενέργειας ότι:

$$\xi^a p_a + \xi^a p'_a = 0 \quad (3.2.2)$$

Αν τώρα και τα δύο σωματίδια είναι έξω από τον ορίζοντα τότε το ένα από τα δύο θα πρέπει να έχει αρνητική ενέργεια άρα δεν γίνεται να υπάρξει όπως είπαμε. Εάν όμως ένα από τα δύο περάσει μέσα από τον ορίζοντα της μελανής οπής (έστω περνά το αντισωματίο) τότε η ποσότητα $-\xi^a p'_a$ εντός του ορίζοντα γεγονότων δεν μπορεί να αποτελεί την ενέργεια του αντισωματίου που βλέπει ο παρατηρητής A διότι:

Το μέτρο του ξ είναι:

$$\xi^a \xi_a = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (3.2.3)$$

οπότε εκτός του ορίζοντα το μέτρο του ξ είναι αρνητικό άρα το ξ είναι χρονοειδές ενώ εντός του ορίζοντα είναι θετικό και το ξ χωροειδές. Ωστόσο γνωρίζουμε ότι δεν μπορεί να υπάρξει παρατηρητής ο οποίος να έχει ταχύτητα που να έχει μέτρο θετικό. Αυτό σημαίνει ότι το ξ εντός του ορίζοντα δεν μπορεί να είναι η ταχύτητα κάποιου παρατηρητή άρα η ποσότητα $-\xi^a p'_a$ δεν αποτελεί την ενέργεια του αντισωματίου. Όπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, εντός του ορίζοντα χώρος και χρόνος αλλάζουν έννοιες οπότε η ποσότητα $-\xi^a p'_a$ αποτελεί τώρα την χωρική ορμή του αντισωματίου προς την κατεύθυνση ξ και φυσικά η χωρική ορμή προς μία κατεύθυνση μπορεί να είναι αρνητική. Έτσι εάν ένα σωματίο του ζεύγους βρεθεί εντός του ορίζοντα τότε η σχέση (3.2.3) θα μπορεί να ισχύει και ταυτόχρονα να έχει φυσικό νόημα. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι εφόσον παράγονται ζεύγη σωματιδίων αναγκαστικά ένα από αυτά θα πρέπει να παράγεται εντός του ορίζοντα γιατί μόνο εκεί αποκτά φυσική σημασία και είναι παρατηρήσιμο. Στην ουσία βέβαια αυτό που παρατηρείται είναι η ακτινοβολία Hawking στο άπειρο με ταυτόχρονη μείωση της ενέργειας της μελανής οπής.

3.2.2 Παραδοχές Hawking

Είναι χρήσιμο να αναφέρουμε τις παραδοχές που έκανε ο Hawking για την απόδειξη της ακτινοβολίας των μελανών οπών. Αυτό είναι σημαντικό να το κάνουμε ώστε να ξέρουμε σε ποιες "περιοχές" είναι αξιόπιστοι οι υπολογισμοί αυτοί και αξίζει να τους μελετήσουμε.

1. Αρχικά θεώρησε ότι η μάζα της μελανής οπής παραμένει σταθερή. Η θεώρηση αυτή μπορεί να γίνει δεκτή για πολύ μικρές μεταβολές της μάζας ως προς το χρόνο ($\frac{dM}{dt} \rightarrow 0$). Τότε αυτό που μπορεί να κάνει κανείς είναι να θεωρεί σε κάθε βήμα δημιουργίας σωματιδίων τη μετρική Schwarzschild απλά κάθε φορά να χρησιμοποιεί άλλη τιμή για την μάζα. Από τη σχέση (3.1.26) βλέπουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της μάζας είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου της μάζας. Άρα για μεγάλη μάζα η προσέγγιση είναι ικανοποιητική. Στα τελικά στάδια όμως που η μάζα της μαύρης τρύπας μειώνεται πάρα πολύ ο λόγος $\frac{dM}{dt}$ γίνεται πολύ μεγάλος και δεν μπορούμε να ξέρουμε τι γίνεται.
2. Στην απόδειξή του ο Hawking κβάντωσε την ύλη, χρησιμοποιώντας παράλληλα τη Γ.Θ.Σ για την περιγραφή του χωρόχρονου. Υποθέτουμε ότι η Γ.Θ.Σ. αποτελεί μία αρκετά καλή προσέγγιση μιας κβαντικής θεωρίας βαρύτητας (την οποία δεν έχουμε βρει ακόμη) σε περιοχή χαμηλών ενεργειών, ή αλλιώς σε περιοχές με μικρή καμπυλότητα, σχεδόν επίπεδες. Το μέτρο του τανυστή Riemann που μας δίνει την τιμή της καμπυλότητας κοντά στον ορίζοντα δίνεται από τη σχέση

$$R \sim \frac{1}{M^2} \quad (3.2.4)$$

Για μεγάλη μάζα δηλαδή η καμπυλότητα είναι αρκετά μικρή και οι υπολογισμοί του Hawking αξιόπιστοι. Ωστόσο και πάλι στα τελευταία στάδια της εξάτμισης μιας μελανής οπής η μάζα μικραίνει άρα η καμπυλότητα γίνεται πολύ μεγάλη και τότε είναι πολύ πιθανόν οι επιδράσεις της κβαντικής βαρύτητας να μην είναι πλέον αμελητέες.

Κεφάλαιο 4

Κβαντική πληροφορία

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστεί να κάνουμε μία σύντομη αναφορά σε έννοιες που θα μας φανούν απαραίτητες για την ακριβή διατύπωση του Παραδόξου της Πληροφορίας.

4.1 "Pure" και "Mixed" Κβαντικές Καταστάσεις

Μέχρι τώρα συνηθίζαμε να περιγράφουμε την κβαντική κατάσταση ενός συστήματος με ένα ket $|\Psi\rangle$, το οποίο αποτελεί ένα διάνυσμα σε κάποιο χώρο Hilbert. Την κβαντική αυτή κατάσταση, δηλαδή την κατάσταση η οποία μπορεί να περιγραφεί από ένα διάνυσμα σε κάποιο χώρο Hilbert θα την ονομάζουμε "pure". Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι διότι θέλουμε να ξεχωρίσουμε την τελευταία, από μία πιο γενική κβαντική κατάσταση η οποία αποτελεί στατιστική συλλογή pure καταστάσεων. Οι κβαντικές αυτές καταστάσεις ονομάζονται "mixed". Για να καταλάβουμε τη διαφορά των δύο αυτών περιπτώσεων θα δώσουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε μία pure κατάσταση $|\Psi\rangle$ η οποία αποτελεί υπέρθεση των καταστάσεων $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$ ως εξής:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) \quad (4.1.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι εάν κάνουμε μία μέτρηση πάνω στο σύστημα τότε θα έχουμε 50% πιθανότητα να μετρήσουμε $|\Psi_1\rangle$ και 50% πιθανότητα να μετρήσουμε $|\Psi_2\rangle$. Ωστόσο πριν τη μέτρηση είναι λάθος να πούμε ότι το σύστημα βρίσκεται είτε

στην κατάσταση $|\Psi_1\rangle$ είτε στην $|\Psi_2\rangle$ με πιθανότητα 50%. Η κατάσταση του είναι η υπέρθεση αυτών των δύο.

Θα μπορούσαμε τώρα να βρισκόμασταν σε μία άλλη περίπτωση. Να είχαμε δηλαδή ένα σύστημα το οποίο ήδη βρίσκεται σε μία κατάσταση $|\Psi_1\rangle$ ή $|\Psi_2\rangle$, αλλά δεν ξέρουμε σε ποια από τις δύο καταστάσεις βρίσκεται. Ας υποθέσουμε ότι έχει 50% πιθανότητα να είναι σε κάθε μία από αυτές. Η κατάσταση του συστήματος δεν μπορεί να περιγραφεί από ένα μόνο ket αλλά αποτελεί στατιστική συλλογή pure καταστάσεων (mixed). Η πιθανότητα 50% που αναφέρουμε εδώ δεν έχει καμία σχέση με την κβαντομηχανική πιθανότητα, αλλά αντίθετα έχει την έννοια της γνωστής κλασικής πιθανότητας. Αρχικά φαίνεται ότι οι δύο αυτές περιπτώσεις δεν διαφέρουν διότι εάν κάποιος πάει να μετρήσει και τα δύο συστήματα ως προς τις ιδιότητες $|\Psi_1\rangle$ και $|\Psi_2\rangle$ θα βγάλει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα. Παρόλαυτά οι κβαντικές αυτές καταστάσεις είναι τελείως διαφορετικές, κάτι που μπορεί να φανεί ως εξής:

Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε τα δύο συστήματα ως προς ένα άλλο μέγεθος φ για το οποίο ισχύει:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) \quad (4.1.2)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) \quad (4.1.3)$$

- Τότε για την pure κατάσταση θα έχουμε :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) \Rightarrow$$

$$|\Psi\rangle = |\varphi_1\rangle \quad (4.1.4)$$

Αν μετρήσουμε δηλαδή το σύστημα θα έχουμε 100% πιθανότητα να βρούμε $|\varphi_1\rangle$.

- Για την mixed κατάσταση θα έχουμε:

50% πιθανότητα να είμαστε στο $|\Psi_1\rangle$ και 50% πιθανότητα να είμαστε στο $|\Psi_2\rangle$.

Η πιθανότητα να είμαστε στο $|\Psi_1\rangle$ και να μετρήσουμε $|\varphi_1\rangle$ είναι $50\% * 50\% = 25\%$

Ομοίως η πιθανότητα να είμαστε στο $|\Psi_2\rangle$ και να μετρήσουμε $|\varphi_1\rangle$ είναι $50\% * 50\% = 25\%$

Η συνολική πιθανότητα να μετρήσουμε δηλαδή $|\varphi_1\rangle$ στη mixed κατάσταση είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων πιθανοτήτων. Δηλαδή 50%. Βλέπει τώρα κανείς τη διαφορά με την pure κατάσταση όπου η πιθανότητα ήταν 100%.

4.2 "Density Operator"

Ορίζουμε τον παρακάτω τελεστή με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να περιγράψουμε μία mixed κβαντική κατάσταση.

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \quad (4.2.1)$$

όπου $|\Psi_i\rangle$ είναι μία pure κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το σύστημά μας και P_i είναι η πιθανότητα με την οποία εμφανίζεται το $|\Psi_i\rangle$.

Εφόσον τα P_i είναι πιθανότητες είναι προφανές ότι θα ισχύει:

$$P_i \geq 0 \quad (4.2.2)$$

$$\sum_i P_i = 1 \quad (4.2.3)$$

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία του πίνακα ρ_{mn} (density matrix) θα έχουμε:

$$\rho_{mn} = \sum_i P_i \langle m | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | n \rangle \quad (4.2.4)$$

όπου τα $|n\rangle, |m\rangle$ είναι τα στοιχεία της βάσης του χώρου Hilbert στον οποίο βρισκόμαστε.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ DENSITY OPERATOR

- $\hat{\rho}$ είναι θετικά ορισμένος: $\langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}$

Απόδειξη:

$$\langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle = \sum_i P_i \langle \varphi | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \varphi \rangle = \sum_i P_i |\langle \varphi | \Psi_i \rangle|^2 \geq 0$$

- $\hat{\rho}$ είναι Ερμητιανός

Απόδειξη:

$$\hat{\rho}^\dagger = \left(\sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \right)^\dagger = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = \hat{\rho}$$

- $\hat{\rho}$ έχει ίχνος μονάδα

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}) &= \text{Tr}\left(\sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\right) = \sum_{in} P_i \langle n | |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| |n\rangle = \\ & \sum_i P_i = 1 \end{aligned}$$

- $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$

Απόδειξη:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \text{Tr}\left(\sum_{ij} P_i P_j |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|\right) = \sum_i P_i^2 \leq 1$$

Μπορεί εύκολα να δει κάποιος ότι ο ορισμός που δώσαμε στην (4.2.1) μπορεί να περιγράψει και μία pure κατάσταση εάν όλα τα P_i είναι μηδέν εκτός από ένα που ισούται με μονάδα. Τότε:

$$\hat{\rho}_p = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ DENSITY OPERATOR PURE ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ :

- $\hat{\rho}_p^2 = \hat{\rho}_p$

Απόδειξη:

$$\hat{\rho}_p^2 = |\Psi\rangle\langle\Psi| |\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \hat{\rho}_p$$

- $\text{Tr}(\hat{\rho}_p^2) = 1$

Απόδειξη:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_p^2) = \sum_i P_i^2 = 1^2 = 1$$

Έστω τώρα A ένα φυσικό μέγεθος. Η μέση τιμή του A σε μία pure κατάσταση δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum_n \langle \Psi | n \rangle \langle n | \hat{A} | \Psi \rangle = \\ & \sum_n \langle n | | \Psi \rangle \langle \Psi | \hat{A} | n \rangle = \text{Tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi| \hat{A}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\langle A \rangle = Tr(\hat{\rho}_p \hat{A}) \quad (4.2.5)$$

Ενώ για τη μέση τιμή του A για μία mixed κατάσταση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho} \hat{A}) &= Tr\left(\sum_i P_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \hat{A}\right) = \sum_{ni} \langle n| |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \hat{A} |n\rangle = \\ &= \sum_i P_i \langle\Psi_i| \sum_n |n\rangle\langle n| \hat{A} |\Psi_i\rangle = \sum_i P_i \langle\Psi_i| \hat{A} |\Psi_i\rangle \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι στον υπολογισμό της μέσης τιμής του A παίζουν ρόλο τόσο οι κλασσικές όσο και οι κβαντομηχανικής φύσης πιθανότητες .

4.3 "Entanglement"

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα σύστημα A το οποίο έχει χώρο Hilbert H_a . Το σύστημα αυτό θα αποτελείται από δύο υποσυστήματα B και C με χώρους Hilbert H_b και H_c αντίστοιχα. Θα ισχύει ότι :

$$H_a = H_b \otimes H_c \quad (4.3.1)$$

$|n\rangle_b$ και $|n\rangle_c$ είναι οι βάσεις των χώρων H_b και H_c .

$\hat{\rho}_a$ είναι ο density operator του συνολικού συστήματος A .

Ορίζουμε τους density operators $\hat{\rho}_b$ και $\hat{\rho}_c$ οι οποίοι ονομάζονται reduced density operators ως εξής:

$$\hat{\rho}_b = \sum_n \langle n|_c \hat{\rho}_a |n\rangle_c \quad (4.3.2)$$

$$\hat{\rho}_c = \sum_n \langle n|_b \hat{\rho}_a |n\rangle_b \quad (4.3.3)$$

Δηλαδή οι $\hat{\rho}_b$ και $\hat{\rho}_c$ αποτελούν τις προβολές του $\hat{\rho}_a$ στις βάσεις των χώρων H_c και H_b αντίστοιχα.

Έστω τώρα ότι έχουμε μία pure κβαντική κατάσταση $|\Psi\rangle_\alpha$ στο χώρο H_a . Η $|\Psi\rangle_\alpha$ αποτελείται από δύο υποσυστήματα B και C .

Ορίζουμε ,ότι εάν οι reduced density operators $\hat{\rho}_b$ και $\hat{\rho}_c$ που υπολογίζονται με βάση τις σχέσεις (4.3.2) και (4.3.3) περιγράφουν mixed καταστάσεις τότε τα συστήματα B και C είναι entangled μεταξύ τους. Υπάρχουν δηλαδή μεταξύ τους τέτοιες

αλληλεπιδράσεις οι οποίες δεν επιτρέπουν τις κβαντικές καταστάσεις του κάθε υποσυστήματος να περιγραφούν ανεξάρτητα.

Στην αντίθετη περίπτωση όπου $\hat{\rho}_b$ και $\hat{\rho}_c$ περιγράφουν pure καταστάσεις τότε η κατάσταση του κάθε υποσυστήματος μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια ενός ket $|\Psi\rangle_b$ και $|\Psi\rangle_c$ αντίστοιχα. Τα δύο υποσυστήματα δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και έτσι η συνολική κατάσταση $|\Psi\rangle_\alpha$ γράφεται:

$$|\Psi\rangle_\alpha = |\Psi\rangle_b \otimes |\Psi\rangle_c \quad (4.3.4)$$

Ας δούμε τώρα δύο παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τα προηγούμενα καλύτερα.

Παράδειγμα 1:

Έστω ότι έχουμε την pure κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b |0\rangle_c + |1\rangle_b |1\rangle_c) \quad (4.3.5)$$

όπου $|0\rangle_b, |1\rangle_b$ και $|0\rangle_c, |1\rangle_c$ είναι τα κάθετα κανονικοποιημένα διανύσματα βάσης των χώρων H_b και H_c αντίστοιχα. Θα υπολογίσουμε τον reduced density operator $\hat{\rho}_b$.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_b &= \sum_n \langle n|_c \hat{\rho}_\alpha |n\rangle_c = \langle 0|_c |\Psi\rangle \langle \Psi| |0\rangle_c + \langle 1|_c |\Psi\rangle \langle \Psi| |1\rangle_c \Rightarrow \\ \hat{\rho}_b &= \frac{1}{2} (|0\rangle_b \langle 0|_b + |1\rangle_b \langle 1|_b) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Από την (4.3.6) βλέπουμε ότι ο $\hat{\rho}_b$ περιγράφει μία mixed κατάσταση άρα τα υποσυστήματα B και C είναι entangled μεταξύ τους. Όπως είπαμε πριν αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο συστημάτων. Αυτό μπορεί να το δει κανείς ως εξής:

Αν επιχειρήσει να μετρήσει το σύστημα B και βρει την κατάσταση $|0\rangle_b$ τότε αναγκαστικά το σύστημα C θα βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle_c$. Ομοίως εάν βρει για το σύστημα B $|1\rangle_b$ τότε το C θα βρίσκεται αναγκαστικά στο $|1\rangle_c$.

Παράδειγμα 2:

Ξεκινάμε τώρα από την pure κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle_b |0\rangle_c + |1\rangle_b |1\rangle_c + |1\rangle_b |0\rangle_c + |0\rangle_b |1\rangle_c) \quad (4.3.7)$$

με $|0\rangle_b, |1\rangle_b$ και $|0\rangle_c, |1\rangle_c$ τα κάθετα κανονικοποιημένα διανύσματα βάσης των χώρων H_b και H_c όπως και πριν.

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_b &= \sum_n \langle n|_c \hat{\rho}_a |n\rangle_c = \langle 0|_c |\Psi\rangle \langle \Psi| |0\rangle_c + \langle 1|_c |\Psi\rangle \langle \Psi| |1\rangle_c \Rightarrow \\ \hat{\rho}_b &= \frac{1}{4} (|0\rangle_b + |1\rangle_b) (\langle 0|_b + \langle 1|_b) + \frac{1}{4} (|1\rangle_b + |0\rangle_b) (\langle 1|_b + \langle 0|_b) \Rightarrow \\ \hat{\rho}_b &= \frac{1}{2} (|0\rangle_b + |1\rangle_b) (\langle 0|_b + \langle 1|_b) \Rightarrow \\ \hat{\rho}_b &= |\Psi\rangle_b \langle \Psi|_b\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

όπου

$$|\Psi\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b + |1\rangle_b)\tag{4.3.9}$$

Βλέπουμε ότι σε αντίθεση με πριν το $\hat{\rho}_b$ περιγράφει τώρα pure κατάσταση επομένως τα δύο συστήματα δεν είναι entangled μεταξύ τους και δεν αλληλεπιδρούν. Η συνολική χβαντική κατάσταση $|\Psi\rangle$ μπορεί να γραφεί σαν τανυστικό γινόμενο των δύο καταστάσεων των χώρων H_b και H_c . Δηλαδή

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_b \otimes |\Psi\rangle_c\tag{4.3.10}$$

με

$$|\Psi\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_c + |1\rangle_c)\tag{4.3.11}$$

4.4 Εντροπία Von Neumann

Ορίζουμε το μέγεθος

$$S = -Tr(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i\tag{4.4.1}$$

όπου $\hat{\rho}$ είναι ο density operator μιας κατάστασης και λ_i είναι οι ιδιοτιμές του τελευταίου. Θα μπορούσαμε να επεκταθούμε και να γράψουμε αρκετά για την εντροπία S ωστόσο εδώ θα αναφερθούμε μόνο στις ιδιότητές της που μας είναι χρήσιμες για το Παράδοξο της Πληροφορίας.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΤΡΟΠΙΑΣ

- Εάν ο $\hat{\rho}$ περιγράφει pure κατάσταση τότε έχει μία μόνο μη μηδενική ιδιοτιμή που ισούται με μονάδα και ιδιοδιάνυσμα την ίδια την κατάσταση $|\Psi\rangle$. Κάνοντας την παραδοχή ότι

$0 \ln 0 = 0$ τότε για pure κατάσταση η εντροπία S είναι μηδέν.

$$S = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -1 \ln 1 = 0$$

- Εάν ο $\hat{\rho}$ περιγράφει mixed κατάσταση τότε $S \neq 0$, διότι ο $\hat{\rho}$ έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές λ_i μικρότερες της μονάδας, με ιδιοδιανύσματα τις καταστάσεις $|\Psi\rangle_i$. Ισχύει ότι

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

Σημείωση:

Βλέπουμε λοιπόν ότι με τη βοήθεια της εντροπίας S είμαστε σε θέση να δούμε εάν δύο συστήματα είναι entangled μεταξύ τους. Βρίσκουμε πρώτα τον reduced density operator του ενός συστήματος και υπολογίζουμε την εντροπία του. Εάν η τελευταία είναι διάφορη του μηδενός τότε αυτό σημαίνει ότι ο reduced density operator περιγράφει mixed κατάσταση και σύμφωνα με αυτά που είπαμε προηγουμένως έχουμε entanglement. Αν αντίθετα $S=0$ τότε έχουμε pure καταστάσεις και όχι entanglement.

Ας επιβεβαιώσουμε τώρα με τη βοήθεια της S αυτό που δείξαμε στο παράδειγμα 1. Ότι τα συστήματα B και C της κατάστασης $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b |0\rangle_c + |1\rangle_b |1\rangle_c)$ είναι entangled μεταξύ τους.

$$(4.3.6) \Rightarrow \hat{\rho}_b = \frac{1}{2} (|0\rangle_b \langle 0|_b + |1\rangle_b \langle 1|_b) = \frac{1}{2} (|\Psi\rangle_1 \langle \Psi|_1 + |\Psi\rangle_2 \langle \Psi|_2)$$

Οι ιδιοτιμές του $\hat{\rho}_b$ είναι οι

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad (4.4.2)$$

Εφόσον

$$(\rho_b)_{mn} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

Επομένως

$$S_b = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = -\ln \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$S_b = \ln 2 > 0 \quad (4.4.4)$$

- Η τελευταία αλλά ίσως και πιο σημαντική ιδιότητα της S που θα χρησιμοποιήσουμε, είναι ότι παραμένει σταθερή με το χρόνο εάν η χρονική εξέλιξη του συστήματος γίνεται με την επίδραση ενός μοναδιαίου τελεστή $\hat{U}(t)$.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τον ορισμό της, η εντροπία εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές του density operator(matrix). Ο $\hat{\rho}$ εξελίσσεται με το χρόνο ως εξής:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i P_i |\Psi_i(t)\rangle \langle \Psi_i(t)| = \sum_i P_i \hat{U}(t) |\Psi_i(0)\rangle \langle \Psi_i(0)| \hat{U}^\dagger(t) \Rightarrow$$

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) \quad (4.4.5)$$

Έστω λ_i οι ιδιοτιμές του density operator(matrix) τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι οποίες αποτελούν λύσεις της εξίσωσης

$$\det(\rho(0) - \lambda I) = 0 \quad (4.4.6)$$

Έχουμε ότι:

$$\rho(t) - \lambda I = U \rho(0) U^\dagger - U \lambda I U^\dagger =$$

$$U (\rho(0) - \lambda I) U^\dagger \Rightarrow \det(\rho(t) - \lambda I) = \det(U (\rho(0) - \lambda I) U^\dagger) =$$

$$\det(U) \det(\rho(0) - \lambda I) \det(U^\dagger) = \det(U U^\dagger) \det(\rho(0) - \lambda I) \Rightarrow$$

$$\det(\rho(t) - \lambda I) = \det(\rho(0) - \lambda I) \quad (4.4.7)$$

Εφόσον

$$U^\dagger U = I$$

Η σχέση (4.4.7) μας δείχνει το εξής πολύ σημαντικό αποτέλεσμα.

Οι λύσεις της εξίσωσης $\det(\rho(t) - \lambda I) = 0$ είναι οι ίδιες με τις λύσεις της εξίσωσης $\det(\rho(0) - \lambda I) = 0$. Άρα οι ιδιοτιμές λ_i μένουν σταθερές με την εξέλιξη του χρόνου. Επειδή η εντροπία S εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές αυτές, σημαίνει ότι η τελευταία παραμένει σταθερή καθώς περνάει ο χρόνος. Δηλαδή εάν έχουμε μία pure κατάσταση με εντροπία μηδέν, η οποία εξελίσσεται χρονικά με τη βοήθεια μοναδιαίου τελεστή, τότε αυτή θα παραμένει μονίμως pure και δεν μπορεί να γίνει mixed. Ομοίως μία mixed κατάσταση θα παραμένει mixed με την ίδια εντροπία.

Κεφάλαιο 5

Το Παράδοξο της Πληροφορίας

Στην τρίτη ενότητα δείξαμε ότι οι μελανές οπές ακτινοβολούν και βρήκαμε την παρακάτω σχέση που εκφράζει τον μέσο αριθμό των σωματιδίων που παρατηρούνται στο άπειρο.

$$\langle N_i \rangle_{\mathfrak{S}^+} = \frac{1}{e^{2\pi\omega_i 4M} - 1}$$

Το αξιοσημείωτο σε αυτή τη σχέση είναι πως η μόνη μεταβλητή η οποία υπάρχει για να διαφοροποιεί την ακτινοβολία Hawking είναι η μάζα των μελανών οπών. Δηλαδή αν δημιουργούνταν δύο μελανές οπές από διαφορετική ύλη, που έχουν όμως την ίδια μάζα, όταν αυτές θα εξατμίζονταν, στο άπειρο θα είχε συγκεντρωθεί η ίδια ακριβώς ακτινοβολία. Σε πρώτη σκέψη το φαινόμενο αυτό μας δείχνει ότι η "πληροφορία", ή διαφορετικά η ύλη η οποία αποτελούσε μία μελανή οπή χάθηκε. Το μόνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι η ακτινοβολία Hawking και πλέον δεν έχουμε τη δυνατότητα να δούμε με κάποιο τρόπο από τι αποτελούνταν η μελανή οπή. Το επιχείρημα αυτό μας δείχνει ότι τελικά ίσως να προκύπτει κάποιο παράδοξο με τη χρήση της ακτινοβολίας Hawking.

Αυτό που θα επιχειρήσουμε να κάνουμε στη συνέχεια είναι να δείξουμε πως το γεγονός ότι η ακτινοβολία των μελανών οπών εξαρτάται μόνο από το χωρόχρονο (δηλαδή τη μάζα) και όχι από άλλες πιθανές κβαντομηχανικές ιδιότητες που μπορεί να έχουν οι τελευταίες, μας οδηγεί σε παραβίαση της μοναδιακότητας της κβαντικής θεωρίας. Σε παραβίαση δηλαδή του αξιώματος ότι η χρονική εξέλιξη ενός συστήματος γίνεται με τη δράση ενός μοναδιαίου τελεστή.

Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να βρούμε τη σχέση που συνδέει την κβαντική κατάσταση του κενού $|0\rangle_a$, ενός παρατηρητή A που βρίσκεται κοντά στον ορίζοντα γεγονότων, με την κβαντική κατάσταση ενός παρατηρητή B που βρίσκεται μακριά

από τη μαύρη τρύπα και έχει διαφορετικό κβαντικό κενό $|0\rangle_b$. Πρέπει να σημειωθεί ότι για την παρουσίαση του επιχειρήματός μας θα πρέπει να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $\text{ket } |0\rangle_a$ και $|0\rangle_b$, και όχι μεταξύ των μέσων τιμών τους που βρέθηκε στο κεφάλαιο 3.

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αναλύσουμε το βαθμωτό πεδίο φ σε θετικούς και αρνητικούς τρόπους ταλάντωσης τόσο για τον παρατηρητή A όσο και για τον B . (Λεπτομέρειες πάνω στη διαδικασία αυτή παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2)

Άρα

$$\hat{\varphi} = \sum_n \hat{a}_n f_n + \hat{a}_n^\dagger f_n^* = \sum_n \hat{b}_n h_n + \hat{b}_n^\dagger h_n^* \quad (5.0.1)$$

Παίρνοντας στην παραπάνω σχέση το εσωτερικό γινόμενο με το f_m σε κάθε μέλος προκύπτει:

$$\begin{aligned} \hat{a}_m &= \sum_n \langle h_n, f_m \rangle \hat{b}_n + \sum_n \langle h_n^*, f_m \rangle \hat{b}_n^\dagger \Rightarrow \\ \hat{a}_m &= \sum_n a_{mn} \hat{b}_n + \sum_n b_{mn} \hat{b}_n^\dagger \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

Για το κενό $|0\rangle_a$ θα ισχύει:

$$0 = \hat{a}_m |0\rangle_a = \left(\sum_n a_{mn} \hat{b}_n + \sum_n b_{mn} \hat{b}_n^\dagger \right) |0\rangle_a \quad (5.0.3)$$

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν μόνο τρόπο ταλάντωσης. Επομένως προκύπτει ότι:

$$\left(\hat{b} + \gamma \hat{b}^\dagger \right) |0\rangle_a = 0 \quad (5.0.4)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι της μορφής

$$|0\rangle_a = C e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}} |0\rangle_b \quad (5.0.5)$$

όπου C σταθερά κανονικοποίησης και μ είναι ένας αριθμός που πρέπει να προσδιορίσουμε. Ισχύει ότι:

$$e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}} = \sum_n \frac{\mu^n}{n!} \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} \right)^n \quad (5.0.6)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μετάθεσης $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ βρίσκουμε ότι:

$$\hat{b} (\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger)^n = (\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger)^n \hat{b} + 2n \hat{b}^\dagger (\hat{b} \hat{b}^\dagger)^{n-1} \quad (5.0.7)$$

Από τις σχέσεις (5.0.6) και (5.0.7) έχουμε ότι:

$$\hat{b} e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger} |0\rangle_b = 2\mu \hat{b}^\dagger e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger} |0\rangle_b \quad (5.0.8)$$

Ενώ από τις (5.0.4) και (5.0.8) βρίσκουμε ότι

$$\mu = -\frac{\gamma}{2}$$

Έτσι

$$|0\rangle_a = C e^{-\frac{\gamma}{2} \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger} |0\rangle_b \quad (5.0.9)$$

Επομένως η γενική λύση της (5.0.3) θα είναι :

$$|0\rangle_a = C e^{-\frac{1}{2} \sum_{mn} \hat{b}_m^\dagger \gamma_{mn} \hat{b}_n^\dagger} |0\rangle_b \quad (5.0.10)$$

όπου γ συμμετρικός πίνακας που δίνεται από τη σχέση

$$\gamma = \frac{1}{2} (a^{-1}b + (a^{-1}b)^T) \quad (5.0.11)$$

Βλέπουμε όπως και αναμέναμε ότι το κενό του παρατηρητή A φαίνεται γεμάτο σωματίδια από τον παρατηρητή B .

Το ότι στον εκθέτη του e στην σχέση (5.0.10) υπάρχουν δύο τελεστές δημιουργίας σημαίνει ότι τα σωματίδια παράγονται πάντα σε ζεύγη (ή διαφορετικά σε ζυγό αριθμό). Δεν γίνεται να έχουμε δημιουργία ενός ή τριών ή γενικά περιττού αριθμού σωματιδίων.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να κάνουμε ορισμένες παραδοχές έτσι ώστε να απλοποιήσουμε και άλλο τη σχέση (5.0.10).

- Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 στην περιοχή του ορίζοντα έχουμε τη δημιουργία ζευγών σωματιδίων. Επειδή θέλουμε να έχουμε διατήρηση της ορμής σε κάθε διαδικασία δημιουργίας σωματιδίων, τα σωματίδια που δημιουργούνται θα πρέπει να είναι της ίδιας ορμής κατά μέτρο. Θα μπορούσε βέβαια να ισχυριστεί κανείς ότι υπάρχει η δυνατότητα να παραχθούν σωματίδια με διαφορετικές ορμές και η διαφορά αυτή να αντισταθμίζεται από την αλλαγή της ορμής της μελανής οπής. Ωστόσο έχουμε θεωρήσει ότι ο χωρόχρονος στον οποίο γίνεται η μελέτη μας είναι σταθερός, οπότε η διατήρηση της ορμής της μελανής οπής είναι στις αρχικές μας υποθέσεις.

Αφού απαιτούμε λοιπόν σωμάτια ίδιας ορμής να πρέπει οι τελεστές δημιουργίας \hat{b}_n^\dagger που δρουν ταυτόχρονα στην κατάσταση $|0\rangle_b$ να έχουν το ίδιο n . Για να ισχύει αυτό θα πρέπει όλοι οι διαγώνιοι όροι του πίνακα γ να είναι μηδενικοί.

Δηλαδή

$$\gamma_{mn} = 0 \quad \forall m \neq n \quad (5.0.12)$$

- Επίσης όπως είπαμε και πάλι στο κεφάλαιο 3 τα σωμάτια θα πρέπει να δημιουργούνται το ένα εντός και το άλλο εκτός του ορίζοντα γεγονότων. Μπορούμε λοιπόν να "σπάσουμε" τους τελεστές δημιουργίας \hat{b}_n^\dagger σε αυτούς που δημιουργούν σωματίδια εκτός του ορίζοντα τα οποία κάποια στιγμή φτάνουν στο άπειρο και αποτελούν την ακτινοβολία Hawking, και σε αυτούς που δρουν εντός του ορίζοντα και δημιουργούν σωμάτια τα οποία πέφτουν στην μελανή οπή. Τους πρώτους θα τους ονομάσουμε \hat{b}_k^\dagger και τους δεύτερους \hat{c}_k^\dagger .

Έτσι τώρα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (5.0.10) ως εξής:

$$|0\rangle_a = C e^{\sum_k \hat{b}_k^\dagger \gamma \hat{c}_k^\dagger} |0\rangle_b \quad (5.0.13)$$

Το γεγονός ότι διώξαμε το συντελεστή $-\frac{1}{2}$ από τον εκθέτη δεν θα επηρεάσει τους υπολογισμούς μας. Το κάναμε για λόγους απλότητας.

Η σχέση (5.0.13) μας δείχνει ότι από το κενό δημιουργείται μία κβαντική κατάσταση

$$|\Psi\rangle = C e^{\hat{b}_1^\dagger \gamma \hat{c}_1^\dagger} e^{\hat{b}_2^\dagger \gamma \hat{c}_2^\dagger} \dots |0\rangle \quad (5.0.14)$$

Η σχέση (5.0.14) μπορεί να γραφεί ως

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \quad (5.0.15)$$

όπου

$$|\Psi_i\rangle \sim e^{\hat{b}_i^\dagger \gamma \hat{c}_i^\dagger} |0\rangle = e^{\hat{b}_i^\dagger \gamma \hat{c}_i^\dagger} |0\rangle_{b_i} |0\rangle_{c_i} \quad (5.0.16)$$

Η $|\Psi_i\rangle$ δηλαδή αντιπροσωπεύει τη δημιουργία ζευγών σωματιδίων στην κατάσταση i . Να σημειώσουμε ότι επειδή ο μεταθέτης των τελεστών \hat{b}_k^\dagger και \hat{c}_k^\dagger είναι μηδέν για διαφορετικό k , αυτό σημαίνει ότι η δημιουργία του ενός ζεύγους σωματιδίων δεν επηρεάζει τη δημιουργία άλλων σωματιδίων. Άρα δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ ζευγών σωματιδίων που βρίσκονται σε άλλη κατάσταση k γι'αυτό και η σχέση (5.0.15) γράφεται σαν τανυστικό γινόμενο. Και σύμφωνα με ότι είπαμε στο κεφάλαιο 4 μεταξύ των $|\Psi_i\rangle$ δεν υπάρχει entanglement. Να σημειώσουμε ότι μηδέν είναι και ο μεταθέτης των \hat{b}_k^\dagger και \hat{c}_k^\dagger με τον εαυτό τους για ίδιο k αλλά για διαφορετικό χρόνο t . Επομένως σωμάτια της ίδιας ορμής που παράγονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Εφόσον λοιπόν μεταξύ των $|\Psi_i\rangle$ δεν έχουμε αλληλεπίδραση θα εξετάσουμε μόνο την $|\Psi_1\rangle$.

Έχουμε ότι:

$$|\Psi_1\rangle = C (|0\rangle_{b_1} |0\rangle_{c_1} + \gamma |1\rangle_{b_1} |1\rangle_{c_1} + \gamma^2 |2\rangle_{b_1} |2\rangle_{c_1} \dots) \quad (5.0.17)$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι τα συστήματα B και C είναι entangled μεταξύ τους. Για λόγους απλότητας που θα μας διευκολύνουν στους υπολογισμούς μας αντικαθιστούμε την $|\Psi_1\rangle$ με μία πιο απλή μορφή η οποία περιέχει δύο entangled μεταξύ τους υποσυστήματα.

Έτσι έχουμε :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b |0\rangle_c + |1\rangle_b |1\rangle_c)$$

Το ότι στην παραπάνω σχέση τα υποσυστήματα B και C είναι entangled μεταξύ τους το δείξαμε στο κεφάλαιο 4. Το ότι αντικαταστήσαμε την $|\Psi_1\rangle$ με την $|\Psi\rangle$ σημαίνει ότι υποθέσαμε πως η πιθανότητα να παραχθεί ένα ζεύγος σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερη από την πιθανότητα να παραχθούν δύο ,ή τρία ή περισσότερα ζεύγη, καθώς η $|\Psi\rangle$ δείχνει ότι έχουμε 50% πιθανότητα να δημιουργηθεί ένα ζεύγος και 50% να παραμείνει κενό. Στην πραγματικότητα αυτό δεν είναι ακριβώς υπόθεση καθώς μπορεί να αποδειχθεί ότι $0 < \gamma < 1$,επομένως η πιθανότητα για ένα ζεύγος είναι όντως αρκετά μεγαλύτερη, αλλά η απόδειξη αυτή δεν θα γίνει εδώ. Παρόλαυτά πρέπει να τονισθεί ότι η αντικατάσταση της $|\Psi_1\rangle$ με την $|\Psi\rangle$ γίνεται καθαρά για ευκολία στους υπολογισμούς μας. Το σημαντικό που πρέπει να κρατήσουμε είναι ότι και στις δύο αυτές καταστάσεις υπάρχει entanglement μεταξύ των υποσυστημάτων B και C .Και σε αυτό το entanglement θα δείξουμε ότι οφείλεται το Παράδοξο της Πληροφορίας.

Πριν τη δημιουργία λοιπόν του πρώτου ζεύγους σωματιδίων έχουμε μόνο την κβαντική κατάσταση της μελανής σπής $|\Psi_M\rangle$. Προφανώς εφόσον αντιπροσωπεύεται από ένα ket είναι pure κατάσταση και η αρχική εντροπία του συστήματος είναι μηδέν.

$$S_{\alpha\rho\chi} = 0$$

Έπειτα δημιουργείται το πρώτο ζεύγος σωματιδίων ,το οποίο κάνουμε και πάλι την υπόθεση ότι δεν αλληλεπιδρά με την μελανή σπή μάζας M . Έτσι μετά την πρώτη δημιουργία ζεύγους η κατάσταση του συστήματος θα είναι η

$$|\Psi\rangle = |\Psi_M\rangle \otimes |\Psi\rangle \Rightarrow$$

$$|\Psi\rangle = |\Psi_M\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b |0\rangle_c + |1\rangle_b |1\rangle_c) \quad (5.0.18)$$

Εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την εντροπία του b σωματιδίου ως προς το υποσύστημα του c και της μελανής οπής βρίσκουμε ότι :

$$S_b = \ln 2$$

(Ο υπολογισμός αυτός έγινε στο κεφάλαιο 4 ,σχέση (4.4.4) όπου υπολογίστηκε η εντροπία για μία ακριβώς ίδια κβαντική κατάσταση.Η μελανή οπή φαίνεται από την σχέση (5.0.18) ότι δεν είναι entangled με το σωματίδιο b άρα η εντροπία S_b οφείλεται μόνο στο entanglement μεταξύ b και c .)

Στη συνέχεια καθώς η διαδικασία εξελίσσεται έχουμε τη δημιουργία και άλλων ζευγών σωματιδίων.Σε κάθε βήμα δημιουργίας αυξάνεται η εντροπία των $\{b\}$ σε σχέση με το υπόλοιπο σύστημα $\{c\}$ και M κατά $\ln 2$.Μετά τη δημιουργία N ζευγών σωματιδίων η κβαντική κατάσταση του συστήματος θα είναι η

$$|\Psi\rangle_{ολ} = |\Psi_M\rangle \otimes \underbrace{|\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \cdots |\Psi\rangle}_N \quad (5.0.19)$$

Θα έχουν μαζευτεί στο άπειρο N b σωματίδια τα οποία αποτελούν την ακτινοβολία Hawking.Το υποσύστημα αυτό θα έχει εντροπία

$$S_b = N \ln 2 \quad (5.0.20)$$

σε σχέση με το υπόλοιπο σύστημα.(Υπενθυμίζουμε ότι στην (5.0.19) βάζουμε τανυστικό γινόμενο γιατί όπως αναφέραμε προηγουμένως η δημιουργία ενός ζεύγους δεν επηρεάζει τη δημιουργία των υπολοίπων)

Μέχρι στιγμής δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα ούτε κάποιο παράδοξο.Η μελανή οπή ακτινοβολεί συνεχώς ,χάνει ενέργεια και το γεγονός ότι τα σωματίδια $\{b\}$ έχουν εντροπία διάφορη του μηδενός δεν μας ενοχλεί.Διότι η συνολική κβαντική κατάσταση του συστήματος είναι η $|\Psi\rangle_{ολ}$ που είναι pure άρα έχει εντροπία μηδέν ,όση και η αρχική.Όπως αναμενόταν από τη χρονική εξέλιξη μέσω μοναδιαίου τελεστή.

Το πρόβλημα εμφανίζεται όταν η μάζα της μελανής οπής έχει μειωθεί πάρα πολύ,και τότε η μεταβολή της μάζας ως προς το χρόνο και η καμπυλότητα R κοντά στον ορίζοντα γίνονται και τα δύο πολύ μεγάλα.($\frac{dM}{dt} \sim -\frac{1}{M^2}$, $R \sim \frac{1}{M^2}$)

Στην ουσία αυτό που γίνεται είναι ότι πλέον δεν ισχύουν δύο βασικές παραδοχές του Hawking.Έτσι δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα τι γίνεται όταν η μάζα της μαύρης τρύπας γίνει πολύ μικρή.

Υπάρχουν δύο πιθανές εκδοχές οι οποίες όπως θα δούμε οδηγούν σε παράδοξο και οι δύο.

Περίπτωση 1:

Μπορεί πλέον όταν η μάζα φτάνει στα όρια της μάζας Planck ,γίνεται πολύ μικρή δηλαδή, η ακτινοβολία Hawking να σταματά.Έτσι μένει ένα "remnant" από την αρχική μελανή οπή μάζας M.Στην περίπτωση αυτή ,αυτό που εξασφαλίζεται είναι η διατήρηση της μοναδιακότητας της θεωρίας μας ,διότι εφόσον εξακολουθεί να υπάρχει το remnant η συνολική κβαντική κατάσταση του συστήματος θα είναι pure άρα και η εντροπία μηδέν.Ωστόσο το γεγονός ότι η διαδικασία σταματά και έχουμε τη δημιουργία αυτού του remnant εμφανίζει άλλο πρόβλημα.Για να μπορεί η ακτινοβολία $\{b\}$ να είναι entangled με το remnant εφόσον τα $\{b\}$ είναι N σε αριθμό θα πρέπει και το remnant να διαθέτει N τουλάχιστον βαθμούς ελευθερίας.Ωστόσο θα μπορούσε κάποιος να ξεκινήσει από μία μελανή οπή μεγαλύτερης μάζας .Στο τέλος θα φτάναμε και πάλι σε ένα remnant μάζας Planck ωστόσο θα είχαν παραχθεί N' σωματίδια με $N' > N$.Αυτό σημαίνει δηλαδή ότι τα remnants έχουν απεριόριστους βαθμούς ελευθερίας στο εσωτερικό τους.Κάτι που δεν είναι ιδιαίτερα αναμενόμενο.Έχουν προταθεί διάφορα επιχειρήματα που παρουσιάζουν ενδεχόμενα προβλήματα στην ύπαρξη των remnants.Ωστόσο η μελέτη αυτών των επιχειρημάτων δεν θα γίνει σε αυτή την εργασία.

Περίπτωση 2:

Η δεύτερη πιθανή εκδοχή για την κατάληξη της ακτινοβολίας Hawking είναι ότι η τελευταία δεν σταματά ποτέ.Η μαύρη τρύπα χάνει συνεχώς ενέργεια μέχρι που "εξατμίζεται".Αυτό όμως μας οδηγεί ,ότι πλέον το σύστημά μας αποτελείται μόνο από τα σωματίδια $\{b\}$ την ακτινοβολία Hawking δηλαδή.Η ακτινοβολία Hawking έχει εντροπία $S_b = N \ln 2$.Είναι δηλαδή entangled .Ωστόσο εφόσον η μελανή οπή δεν υπάρχει πλέον τα $\{b\}$ δεν έχουν κάτι με το οποίο μπορεί να είναι entangled.Η ύπαρξη της εντροπίας τους υποδηλώνει ότι δεν μπορούν να περιγραφούν ως μία pure κατάσταση αλλά μόνο με τη βοήθεια ενός mixed density matrix.

Δείξαμε όμως στο κεφάλαιο 4 ότι αν ένα σύστημα εξελίσσεται με τη βοήθεια ενός μοναδιαίου τελεστή η εντροπία Von Neumann παραμένει σταθερή.Και εφόσον εδώ είχαμε αύξηση της εντροπίας αυτό σημαίνει ότι η χρονική εξέλιξη ΔΕΝ έγινε με τη βοήθεια ενός μοναδιαίου τελεστή.

Φτάσαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι στην βαρύτητα και στην ακτινοβολία των μελανών οπών δεν ισχύει ένα από τα βασικά αξιώματα της κβαντομηχανικής.Αν βέβαια σε κάποιον φαίνεται όχι και κάτι τόσο τρομερό ,και ότι απλά η λύση του προβλήματος αυτού θα ήταν μία απλή τροποποίηση των αξιωμάτων της κβαντομηχανικής για την περίπτωση της βαρύτητας,ότι δηλαδή εκεί η χρονική εξέλιξη δεν γίνεται με μοναδιαίο τελεστή θα πρέπει να σκεφτεί το εξής.Έχουν προταθεί επιχειρήματα που ισχυρίζονται ότι η χρονική εξέλιξη με MH μοναδιαίο τελεστή μπορεί να σημαίνει παραβίαση της αρχής διατήρησης της ενέργειας.

Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό ας σκεφτούμε το εξής απλό παράδειγμα.

Τη διαδικασία της κβαντικής μέτρησης.

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα με κατάσταση

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|E_1\rangle + |E_2\rangle) \quad (5.0.21)$$

όπου $|E_1\rangle$ και $|E_2\rangle$ ιδιοδιανύσματα της ενέργειας με ιδιοτιμές E_1 και E_2 αντίστοιχα.

Η μέση τιμή της ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\langle E_\mu \rangle = \frac{E_1 + E_2}{2} \quad (5.0.22)$$

Μετά την κβαντική μέτρηση η μέση τιμή της ενέργειας θα είναι είτε E_1 είτε E_2 αφού η κατάσταση θα έχει καταρρεύσει σε ένα από τα δύο ιδιοδιανύσματα της ενέργειας. Θα είναι δηλαδή διαφορετική της αρχικής. Βλέπουμε δηλαδή ότι με τη δράση ενός μη μοναδιαίου τελεστή όπως είναι αυτός της μέτρησης, έχουμε μη διατήρηση της ενέργειας στο σύστημα που μελετάμε. Ωστόσο εδώ δεν υπάρχει κάποιο παράδοξο διότι θεωρούμε ότι η ενέργεια που χάθηκε από το σύστημα την πήρε η μετρική συσκευή. Στην περίπτωση της μελανής οπής όμως που το σύστημα είναι απομονωμένο ενδέχεται η διατήρηση της ενέργειας να παραβιάζεται.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η εξαχνωση των μελανών οπών μας οδηγεί σε παραβίαση αξιωμάτων πάνω στα οποία έχει βασιστεί όλη η μελέτη της φυσικής μας.

Κεφάλαιο 6

Διορθώσεις Κβαντικής Βαρύτητας

Στην προσπάθειά του κάποιος να μπορέσει να δώσει μία ικανοποιητική απάντηση για το παράδοξο της πληροφορίας, ίσως το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξετάσει είναι εάν μικρές διορθώσεις στην περιγραφή της βαρύτητας από τη γενική θεωρία της σχετικότητας, λόγω κβαντικών αλληλεπιδράσεων, αλλάζουν την κβαντική κατάσταση των σωματιδίων που παράγονται. Οφείλουμε βέβαια οι διορθώσεις που θα θεωρήσουμε να είναι αρκετά μικρές. Διότι στην περιοχή του ορίζοντα η καμπυλότητα είναι πολύ μικρή, επομένως και η ενέργεια του βαρυτικού πεδίου στην περιοχή αυτή είναι τέτοια που η Γ.Θ.Σ θα πρέπει να αποτελεί πολύ καλή προσέγγιση. Σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε ακτινοβολία $\{b\}$ η οποία δεν είναι entangled με τα σωματίδια $\{c\}$. Θα πρέπει δηλαδή η συνολική κατάσταση λίγο πριν την εξάτμιση να είναι της μορφής

$$|\Psi\rangle_{\text{ολ}} = |\Psi_M\rangle \otimes (C_0 |0\rangle_b + C_1 |1\rangle_b + \dots) \otimes (D_0 |0\rangle_c + D_1 |1\rangle_c + \dots) \quad (6.0.1)$$

Η σχέση (6.0.1) ωστόσο παρατηρούμε ότι είναι πολύ διαφορετική από την

$$|\Psi\rangle_{\text{ολ}} = |\Psi_M\rangle \otimes \underbrace{|\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \dots \otimes |\Psi\rangle}_N$$

όπου

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_b |0\rangle_c + |1\rangle_b |1\rangle_c) \quad (6.0.2)$$

οπότε οι διορθώσεις της κβαντικής βαρύτητας θα πρέπει να είναι της τάξεως της μονάδας. Δηλαδή στην ουσία να μην ισχύει καθόλου η διαδικασία που ακολούθησε ο

Hawking. Κάτι βέβαια που φαίνεται αρκετά περίεργο, διότι "εργάστηκε" σε περιοχές ενεργειών κοντά στην κλασική φυσική.

Ένα παράδειγμα για να δούμε ότι μικρές διορθώσεις δεν μπορούν να αλλάξουν δραματικά την κατάσταση (6.0.2) είναι το εξής:

Παράδειγμα:

Θεωρούμε την "αλλαγμένη" λόγω επίδρασης κβαντικής βαρύτητας κατάσταση που περιγράφει τη δημιουργία σωματιδίων.

$$|\Psi'\rangle = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} |0\rangle_b |0\rangle_c + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} |1\rangle_b |1\rangle_c \quad (6.0.3)$$

Για $\varepsilon = 0$ η (6.0.3) ταυτίζεται με την (6.0.2).

Θα υπολογίσουμε τώρα την εντροπία του σωματιδίου b σε σχέση με το c.

Έχουμε:

$$\hat{\rho}_b = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 |0\rangle_b \langle 0|_b + \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 |1\rangle_b \langle 1|_b \quad (6.0.4)$$

Άρα

$$\hat{\rho}_{bmn} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (6.0.5)$$

Οι ιδιοτιμές του reduced density matrix είναι:

$$\lambda_1 = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 \quad (6.0.6)$$

και

$$\lambda_2 = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 \quad (6.0.7)$$

Άρα

$$S_b = - \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 \ln \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 - \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 \ln \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2 \quad (6.0.8)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να ορίσουμε τι σημαίνει, μικρές διορθώσεις λόγω κβαντικής βαρύτητας τις οποίες θέλουμε να εισάγουμε στους υπολογισμούς μας. Στην σχέση (6.0.2) όπου δεν υπάρχουν οι διορθώσεις αυτές, η πιθανότητα να έχουμε τη δημιουργία ενός ζεύγους σωματιδίων είναι ίδια με αυτή του να παραμείνει ο χώρος κενός. (50%). Επομένως και στην περίπτωση που εισάγουμε τις διορθώσεις θα θέλουμε ο λόγος των πιθανοτήτων αυτών να είναι περίπου ίσος με τη μονάδα. Ωστόσο για να είμαστε ασφαλείς και σίγουροι θεωρούμε ότι:

Ορισμός: Ο λόγος της πιθανότητας δημιουργίας ζεύγους σωματιδίων προς την πιθανότητα του να παραμείνει ο χώρος κενός, μπορεί να είναι λόγω επίδρασης κβαντικής βαρύτητας μικρότερος του 2 και μεγαλύτερος του $\frac{1}{2}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό και τη σχέση (6.0.3) θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} < \frac{\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2}{\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2}} \right)^2} < 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon} \right)^2 < 2$$

Λύνοντας την παραπάνω ανίσωση προκύπτει εύκολα ότι για τις διορθώσεις της κβαντικής βαρύτητας που ορίσαμε, για το ε θα πρέπει να ισχύει:

$$\varepsilon < -8,24 \quad \cup \quad -0,24 < \varepsilon < 0,24 \quad \cup \quad \varepsilon > 8,24$$

Αυτό που μπορεί να δείξει κανείς είναι ότι για αυτές τις περιοχές του ε η εντροπία S_b εξακολουθεί να είναι θετική σε κάθε βήμα δημιουργίας σωματιδίων και όχι μηδενική. Θα το δούμε μόνο για την περιοχή $-0,24 < \varepsilon < 0,24$. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τις δύο άλλες περιοχές. Στην περιοχή αυτή το ε είναι πολύ μικρό ($\varepsilon \rightarrow 0$) οπότε προκύπτει:

$$S_b = - \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon}{1 + 2\varepsilon^2} \left(-\ln 2 + 2\sqrt{2}\varepsilon \right) - \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\varepsilon}{1 + 2\varepsilon^2} \left(-\ln 2 - 2\sqrt{2}\varepsilon \right) \Rightarrow$$

$$S_b = \frac{\ln 2 + 8\varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon^2} \quad (6.0.9)$$

Άρα

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_b = \ln 2 > 0 \quad (6.0.10)$$

Άρα βλέπουμε ότι μικρές διορθώσεις αφήνουν θετική την τιμή της εντροπίας οπότε το παράδοξο παραμένει. Για να έχουμε $S_b = 0$ σύμφωνα με τη σχέση (6.0.8) θα πρέπει $\varepsilon = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ωστόσο οι τιμές αυτές για το ε είναι εκτός των περιοχών, που είδαμε ότι ισχύουν με βάση μικρές διορθώσεις. Θα μπορούσε να πει κάποιος ότι απλά οι χβαντικές διορθώσεις μπορεί να είναι πιο μεγάλες και να περιλαμβάνουν τις τιμές $\varepsilon = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Παρόλαυτά οι διορθώσεις χβαντικής βαρύτητας που θεωρήσαμε παραπάνω στον ορισμό μας, είναι ήδη αρκετά μεγαλύτερες από αυτές που αναμένουμε. Δηλαδή ακόμη και σε περίπτωση που εντός αυτών των περιοχών το Παράδοξο της Πληροφορίας λυνόταν δεν θα ήμασταν σίγουροι εάν μπορούν να υπάρξουν τέτοιες διορθώσεις. Τώρα όμως που αυτό παραμένει μπορούμε να πούμε με σχετική βεβαιότητα ότι για να λυθεί το Παράδοξο της Πληροφορίας απαιτούνται πολύ μεγάλες διορθώσεις οι οποίες δεν συμβαδίζουν με τις μέχρι τώρα αντιλήψεις μας για τη βαρύτητα.

Σημείωση:

Σε αυτό το σημείο καλό θα ήταν να ξεκαθαρίσουμε το εξής:

Μία πολύ συχνή λάθος αντίληψη για το παράδοξο της πληροφορίας είναι ότι εάν βρεθεί μηχανισμός που να κάνει τα σωματίδια b και c που δημιουργούνται να μην είναι entangled μεταξύ τους τότε το παράδοξο θα έχει λυθεί. Και αυτό διότι αρκετοί πιστεύουν ότι η ακτινοβολία των μελανών οπών είναι παρόμοια με αυτή ενός ξύλου που καίγεται. Ο λόγος που έχουμε συχνά αυτή τη λάθος αντίληψη είναι διότι η ακτινοβολία μίας μελανής οπής δίνεται από την σχέση του Planck για το μέλαν σώμα επομένως πολλοί γι' αυτό θεωρούν ότι δεν υπάρχει διαφορά με ένα ξύλο που καίγεται. Εκεί έχει αποδειχθεί ότι η πληροφορία διατηρείται, και ο τελεστής εξέλιξης είναι όντως μοναδιαίος. Ωστόσο υπάρχει μία σημαντική διαφορά με τις μελανές οπές. Η ακτινοβολία που προέρχεται από ένα ξύλο που καίγεται εξαρτάται από το υλικό που αποτελεί το ξύλο. Το ίδιο το υλικό αυτό καίγεται και απελευθερώνεται σαν ακτινοβολία. Έτσι εάν κάποιος μπορέσει και συγκεντρώσει όλη αυτή την ακτινοβολία θα μπορέσει να ανακτήσει την "πληροφορία" από την οποία αποτελούνταν το ξύλο. Στην περίπτωση της μαύρης τρύπας όμως, όπως είδαμε στην απόδειξη της ακτινοβολίας Hawking, η τελευταία εξαρτάται μόνο από τη μάζα της μελανής οπής και όχι από τα επιμέρους στοιχεία που δημιουργήσαν την μελανή οπή. Ακόμη δηλαδή και εάν είχαμε έναν μηχανισμό που να εξασφαλίζει την μοναδιαία εξέλιξη του συστήματος η πληροφορία που αποτελεί μια μαύρη τρύπα θα χάνονταν. Μπορούμε να πούμε δηλαδή ότι το παράδοξο της πληροφορίας έχει δύο όψεις. Μία είναι η μη διατήρηση της μοναδιακότητας, το οποίο επιχείρημα χρειάζόταν

μαθηματική προσέγγιση για την κατανόηση του,την οποία και κάναμε.Και η άλλη είναι ότι χάνεται η πληροφορία από την οποία δημιουργήθηκε η μελανή οπή.Η δεύτερη όψη του παραδόξου είναι σχετικά προφανής και δεν απαιτεί μαθηματικά για την κατανόησή της γι' αυτό και δεν επεκταθήκαμε περισσότερο σε αυτή.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

Είδαμε λοιπόν ότι η εργασία του Hawking στην οποία απέδειξε πως οι μελανές οπές ακτινοβολούν όχι απλά άλλαξε τις μέχρι τότε πεποιθήσεις για τις μαύρες τρύπες αλλά έθεσε και ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα στη σύγχρονη φυσική. Το Παράδοξο της Πληροφορίας. Ο Hawking στην ημικλασική προσέγγιση της εργασίας του, κβάντωσε την ύλη διατηρώντας παράλληλα την περιγραφή του χωρόχρονου όπως αυτός δίνεται από την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Σε αυτά τα πλαίσια είναι αναπόφευκτο ότι θα καταλήξουμε σε μία από τις εξής δύο περιπτώσεις.

1. Μία μελανή οπή ,μάζας της τάξεως Planck(remnant) .Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν παράδοξα εξαιτίας του απεριόριστου αριθμού εσωτερικών καταστάσεων (βαθμοί ελευθερίας) που μπορούν να έχουν τα remnants.
2. Η μελανή οπή εξατμίζεται πλήρως.Στην περίπτωση αυτή έχουμε :
 - Παραβίαση της μοναδιακότητας της κβαντικής θεωρίας.Δηλαδή η χρονική εξέλιξη του συστήματος δεν γίνεται με τη δράση ενός μοναδιαίου τελεστή.Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα ζεύγη σωματιδίων που παράγονται κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής είναι entangled μεταξύ τους.
 - Χάνεται η πληροφορία της μελανής οπής.Δηλαδή ακόμη και αν μπορούσαμε να συγκεντρώσουμε όλη την ακτινοβολία Hawking δεν θα υπήρχε τρόπος να μάθουμε από τι είδους ύλη αποτελούνταν η μελανή οπή.Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ακτινοβολία Hawking δείξαμε ότι εξαρτάται μόνο από τη μάζα της μελανής οπής και όχι από τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας της.

Επομένως στην περίπτωση δύο, εάν κάποιος θέλει να δώσει μια λύση ,θα πρέπει να προτείνει έναν μηχανισμό ο οποίος λύνει και τα δύο προβλήματα.Δημιουργεί δηλαδή μία ακτινοβολία που μπορεί να περιγραφεί ως pure κατάσταση αλλά ταυτόχρονα

επιτρέπει την "πληροφορία" που αποτελεί την μελανή οπή να διαφύγει στο άπειρο. Κάτι τέτοιο ωστόσο δεν είναι καθόλου εύκολο διότι όπως είδαμε μικρές διορθώσεις στα αποτελέσματα του Hawking λόγω κβαντικής βαρύτητας δεν επιλύουν το παράδοξο. Αυτό που φαίνεται είναι, ότι ίσως τελικά να κάναμε λάθος για το πόσο μεγάλη είναι η επίδραση της κβαντικής βαρύτητας. Ίσως να μην είναι αμελητέα, ακόμη και σε περιοχές χαμηλών ενεργειών κάτι που σημαίνει ότι ενδέχεται να πρέπει να αλλάξουμε δραστικά τις απόψεις μας για τη βαρύτητα. Ωστόσο θα μπορούσε βέβαια η περιγραφή της βαρύτητας να είναι ικανοποιητική από τη Γ.Θ.Σ. και το πρόβλημα τελικά να εντοπίζεται στην κβαντομηχανική. Το μόνο σίγουρο είναι πως το Παράδοξο της Πληροφορίας είναι ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον πρόβλημα η λύση του οποίου θα μας απασχολήσει για αρκετό καιρό ακόμη

Βιβλιογραφία

- [1] Στέφανος Τραχανάς, Σχετικιστική Κβαντομηχανική: Μία εισαγωγή στη μεγάλη σύνθεση, ΠΕΚ 2000
- [2] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975) [Erratum-ibid. 46, 206 (1976)];
- [3] S. W. Hawking, Phys. Rev. D 14, 2460 (1976).
- [4] Black Holes: Lecture notes by Dr. P.K. Townsend DAMTP, University of Cambridge, Silver St., Cambridge, U.K.: <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9707012.pdf>
- [5] Samir D. Mathur: What Exactly is the Information Paradox : <http://arxiv.org/abs/0803.2030>
- [6] Samir D. Mathur: The information paradox: A pedagogical introduction: <http://arxiv.org/abs/0909.1038>
- [7] Leonard Parker: Probability distribution of particles created by a black hole: Phys. Rev. D 12, 1519 (1975).
- [8] Dr David Tong: Quantum Field Theory University of Cambridge Part III Mathematical Tripos
- [9] James B. Hartle - GRAVITY An Introduction to Einstein's General Relativity. San Francisco: Addison Wesley, 2003