

# Energy Conditions and Singularity Theorems

Δημήτριος Κρομμύδας

Purdue University

ΑΠΘ, 19 Δεκεμβρίου, 2019

- Energy Conditions
- Exclusion of pathological spacetimes
  - Example: Traversable Wormhole
- Theorems of General Relativity
  - Example: Singularity Theorems

# Energy Conditions

"Left wing made of fine marble, right wing made of low grade wood" <sup>1</sup>

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$



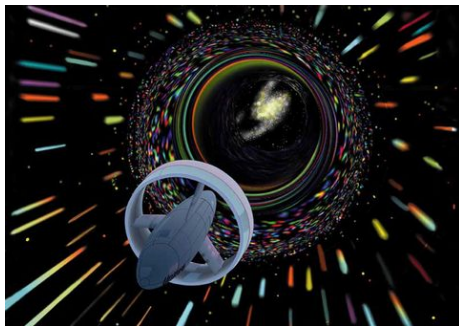
Τί κανόνες πρέπει να ακολουθεί η ύλη για να είναι **physical**;

---

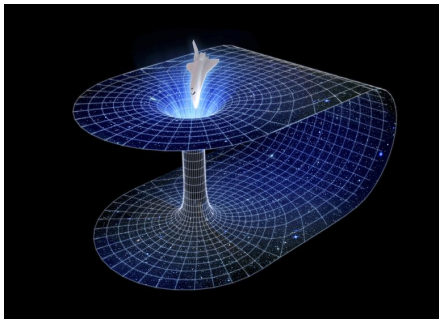
<sup>1</sup>A.Einstein, *Physics and Relativity*, 1936

# Παθολογικοί Χωροχρόνοι

- Traversable Wormholes, Warp-Drives, time-machines → time-travel, “super-luminal” travel.



# Traversable Wormholes



Time travel used to be thought of as just science fiction, but Einstein's general theory of relativity allows for the possibility that we could warp space-time so much that you could go off in a rocket and return before you set out.

-Stephen Hawking

# Energy Conditions

Strong Energy Condition (SEC): tidal tensor  $T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}$  όπως μετράται από timelike παρατηρητές:

$$SEC : T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu + \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0, \quad \forall t_\mu t^\mu < 0.$$

Weak Energy Condition (WEC): stress tensor  $T_{\mu\nu}$  (πυκνότητα ύλης) όπως μετράται από timelike παρατηρητές:

$$WEC : T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0, \quad \forall t_\mu t^\mu < 0.$$

Null Energy Condition (NEC): Stress tensor  $T_{\mu\nu}$  όπως μετράται από null παρατηρητές:

$$NEC : T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad \forall k_\mu k^\mu = 0.$$

# Energy Conditions

Για ιδανικά ρευστά (ή απλά Type I κατά Hawking) <sup>2</sup> :

$$SEC : T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu = \rho + 3P \geq 0,$$

$$WEC : T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu = \rho + P \geq 0 \ \& \ \rho \geq 0,$$

$$NEC : T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \rho + P \geq 0.$$

---

<sup>2</sup> *The Large Scale Structure of Space-Time*, Hawking & Ellis, 1973

- Περιγράφει το πως αλλάζει ο ρυθμός διαστολής μίας “σφαίρα” null γεωδαισιακών ως προς την affine παράμετρο  $\lambda$  μίας κεντρικής γεωδαισιακής<sup>3</sup>.

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\theta^2}{D-2} - \sigma^2 - R_{\mu\nu}K^\mu K^\nu.$$

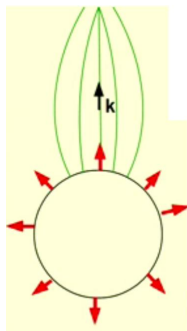
- Expansion scalar:  $\theta = \lim_{\mathbf{A} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{A}} \frac{dA}{d\lambda}$ .
- $\sigma^{(\mu\nu)}$ : the rate of shearing into an ellipsoid.

---

<sup>3</sup>*Relativistic cosmology I*, A. Raychaudhuri, 1955.



# Classical Focusing



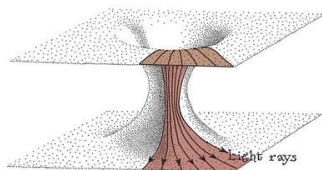
- Raychaudhuri + NEC + Einstein eq = Classical Null Focusing<sup>4</sup>

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\theta^2}{D-2} - \sigma^2 - T_{\mu\nu}K^\mu K^\nu \leq 0$$

<sup>4</sup>R. Penrose, *Gravitational Collapse and spacetime Singularities* (1965)

# On Wormhole traversability

- Για να περάσουν μέσα απο το “λαιμό”, οι null rays πρέπει να συγκλίνουν (focus) και έπειτα να αποκλίνουν (de-focus)  $\equiv \frac{d\theta}{d\lambda} \geq 0$  (flaring-out condition)<sup>5</sup>.
- Το Classical Focusing theorem δεν το επιτρέπει καθώς  $\frac{d\theta}{d\lambda} \leq 0$ .



<sup>5</sup>M.S. Morris, K.S. Thorne, 1987

Στην GR, ο NEC μας προστατεύει!



- Υπόθεση για απόδειξη πολλών θεωρημάτων στη Γενική Σχετικότητα (GR): Singularity Theorems, Area Theorems, No Hair Theorems etc.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>A *Primer on Energy Conditions*, Erik Curiel, 1405.0403.

# Singularity Theorems

Συστατικά:

- A Causality condition π.χ. Global Hyperbolicity  $\rightarrow$  ύπαρξη γεωδαισιακών χωρίς focal points.
- A Curvature Condition (Energy Condition) = focusing theorem + συνοριακές/αρχικές συνθήκες  $\rightarrow$  όλες οι γεωδαισιακές πρέπει να συγκλίνουν (focus).

Άρα, οποιοσδήποτε χωροχρόνος περιέχει τα παραπάνω συστατικά έχει τουλάχιστον μία γεωδαισιακή η οποία είναι past(future) incomplete!

# Κι εγώ που κολλάω;

Γενίκευση των Energy Conditions και των συνεπειών τους στις Ημικλασικές (SCG) και Κβαντικές θεωρίες βαρύτητας (QG):

- Υπάρχουν Traversable Wormholes;
- Μπορούμε να επικοινωνήσουμε ή να ταξιδέψουμε μέσα από αυτές;
- Γενίκευση θεωρημάτων στην SCG και QG; π.χ. υπάρχουν singularities; (σκεφτείτε το!)

- DK (thesis): 1806.00107

- Ben Freivogel & DK : Wormhole Wars IV - *A New Bound*, DOI: 10.1007/JHEP12(2018)067.

- Eleni-Alexandra Kontou, Ben Freivogel & DK: Wormhole Wars V - *SNEC Strikes Back*, coming soon...